

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra aplikované mechaniky - 330

**Analýza napět'ového pole pro případ bodového styku
dvou zakřivených těles**

**Stress Analysis of Point Contact Between two Curved
Bodies**

Bakalářská práce

Student:
Vedoucí bakalářské práce:

Vojtěch Machalla
Ing. Michal Šofer, Ph.D.

Ostrava 2015

Zadání bakalářské práce

Student: **Vojtěch Machalla**
Studijní program: B2341 Strojírenství
Studijní obor: 3901R003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Analýza napětového pole pro případ bodového styku dvou zakřivených těles**
Stress Analysis of Point Contact Between two Curved Bodies

Zásady pro vypracování:

1. Zpracujte úvod do problematiky nalezení složek tenzoru napjatosti pro případ bodového styku dvou zakřivených těles v elastické oblasti.
2. Navrhněte a popište metodiku komparace jednotlivých složek tenzoru napjatosti získaných s využitím zvolené teorie a metody konečných prvků.
3. Na vybraném praktickém příkladě proveďte analýzu složek tenzoru napjatosti pod kontaktním povrchem s využitím metody konečných prvků a zvolené teorie, získané výsledky porovnejte a vhodně komentujte.

Seznam doporučené odborné literatury:

Sackfield, A.; Hills, D.A.: Some useful results in the classical hertz contact problem, Journal of Strain Analysis 2, vol. 18, 1983

Popov, V.: Contact mechanics and friction, Springer, 2010, 362 p., ISBN 978-3-642-10803-7

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Michal Šofer, Ph.D.**

Datum zadání: 13.12.2014

Datum odevzdání: 18.05.2015



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Čestné prohlášení studenta:

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce. Veškeré podklady, ze kterých jsem čerpal, jsou uvedeny v seznamu použité literatury a citovány v textu dle normy ČSN ISO 690.

V Ostravě dne 18.5.2015

Václav Machalla
.....
podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a §60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě:18.5.2015.....

Vojtěch Machalla
.....

Na Chromině 586/87, Hat'

Vojtěch Machalla

Anotace:

Machalla, V.: *Analýza napětového pole pro případ bodového styku dvou zakřivených těles: bakalářská práce*. Ostrava, VŠB Technická univerzita, Fakulta strojní, 2015, 42 s., 1 př., Vedoucí bakalářské práce Šofer, M.

Předmětem této bakalářské práce je nalezení složek tenzoru napjatosti v případě bodového styku kontaktních těles s využitím dvou přístupů - metody konečných prvků a semianalytického modelu. Práce se rovněž zabývá vzájemným srovnáním výsledků z obou přístupů na zvoleném příkladu. Bodový kontakt je realizován působením zatížení s eliptickou kontaktní plochou s Hertzovým rozložením tlaku nad touto oblastí na nekonečný poloprostor v případě semianalytického přístupu, resp. na kvádr o konečných rozměrech v případě MKP přístupu. V rámci efektivnějšího získání výsledků v případě MKP přístupu bylo v prostředí programu Ansys vytvořeno makro, které umožňuje získat kompletní tenzor napjatosti pro uzly ve zvolené hladině pod kontaktním povrchem.

Annotation:

Machalla, V.: *Stress Analysis of Point Contact Between two Curved Bodies: Bacheleor Thesis*. Ostrava, VŠB Technical University, Faculty of Mechanical Engineering, 2015, 42 p., 1 en., Head of Bachelor Thesis Šofer, M.

Aim of this thesis is to find the stress tensor components in the case of point contact using two approaches - finite element method and semi-analytical model. The subject of the thesis is also comparison between the results of two mentioned approaches, which have been obtained by solving a specific example. Point contact is simulated by loading the infinite half-space in case of semi-analytical approach and block with finite dimensions in case of FEM approach with elliptical contact area with Hertz pressure distribution over this area. Within the framework of effective obtaining the results with FEM approach, there was created a macro that allows us to get a complete stress tensor on selected nodes, situated in particular depth below the contact surface.

Obsah

Seznam použitých znaků a symbolů	7
1. Úvod	8
2. Současný stav řešené problematiky	9
2.1. Obecné poznatky Hertzovy teorie	9
2.2. Nalezení složek tenzoru napjatosti pro případ liniového kontaktu	10
2.3. Nalezení složek tenzoru napjatosti pro případ bodového kontaktu	16
2.3.1 Postup výpočtu:	20
3. Využití metody konečných prvků pro nalezení složek tenzoru napjatosti u bodového styku dvou těles	21
3.1. Geometrický model	21
3.2. Tvorba konečnoprvkové sítě	22
3.3. Okrajové podmínky	26
3.3.1. Vazby	26
3.3.2. Definice kontaktní podmínky	28
3.3.3. Zatížení	29
3.3. Vyhodnocení	31
4. Porovnání výsledků:	33
4.1. Výsledky - 1 část	33
4.2. Výsledky - 2 část	35
5. Závěr	38
Seznam použité literatury	39
Přílohy	41
I. Příloha: Makro pro vyhodnocení složek tenzoru napjatosti	42

Seznam použitých znaků a symbolů

a	[mm]	Hlavní poloosa kontaktní elipsy
b	[mm]	Vedlejší poloosa kontaktní elipsy
b_0	[mm]	Šířka kontaktní plochy pro případ liniového styku
d_1	[mm]	Průměr menšího kontaktního válce
d_2	[mm]	Průměr většího kontaktního válce
E	[MPa]	Modul pružnosti v tahu
E_1	[MPa]	Modul pružnosti v tahu menšího kontaktního válce
E_2	[MPa]	Modul pružnosti v tahu většího kontaktního válce
F	[N/mm]	Síla na jednotku délky
k	[-]	Poměr hlavní a vedlejší poloosy
$p(x)$	[MPa]	Velikost Hertzova tlaku v závislosti na souřadnici x
p_0	[MPa]	Maximální velikost kontaktního tlaku
x	[mm]	Souřadnice ve směru osy x
y	[mm]	Souřadnice ve směru osy y
z	[mm]	Souřadnice ve směru osy z
μ	[-]	Poissonovo číslo
σ_x	[MPa]	Normálová složka napětí ve směru osy x
σ_y	[MPa]	Normálová složka napětí ve směru osy y
σ_z	[MPa]	Normálová složka napětí ve směru osy z
σ_ϕ	[MPa]	Obvodové napětí
σ_r	[MPa]	Radiální napětí
$\tau_{r\phi}$	[MPa]	Tečné napětí
τ_{xy}	[MPa]	Smykové napětí v rovině xy
τ_{xz}	[MPa]	Smykové napětí v rovině xz
τ_{yz}	[MPa]	Smykové napětí v rovině yz
φ	[N.m]	Biharmonická funkce napětí

1. Úvod

V současné době, i přes existenci relativně výkonné výpočetní techniky a dostupnost řady konečnoprvkových softwarů je stále aktuální otázka použití alternativních přístupů pro zjišťování jednotlivých složek tenzoru napjatosti v případě jak bodového, tak i liniového styku dvou kontaktních těles.

Jednou z největších výhod využití alternativních přístupů pro zjišťování jednotlivých složek tenzoru napjatosti je především absence komerčního MKP software, která s sebou nese nemalou finanční úsporu. Mezi další výhody se především řadí získání požadovaných výsledků v relativně krátkém časovém intervalu ve srovnání s MKP přístupem, kdy v případě řešení bodového styku rapidně stoupá výpočetní a časová náročnost. Na straně druhé, nespornou výhodou komerčního MKP software je možnost aplikovat prakticky libovolný tvar kontaktní plochy s libovolným průběhem kontaktního tlaku nad touto oblastí na více či méně komplexní geometrii.

Řada dostupných alternativních řešení je založena na Hertzově teorii, která předpokládá eliptický tvar kontaktní plochy s Hertzovým rozložením normálového tlaku nad touto oblastí. Dalším omezením je navíc předpoklad působení takto definovaného zatížení na nekonečný poloprostor.

Předmětem této bakalářské práce je vzájemné srovnání MKP a semianalytického přístupu pro nalezení jednotlivých složek tenzoru napjatosti pro vybranou geometrii.

2. Současný stav řešené problematiky

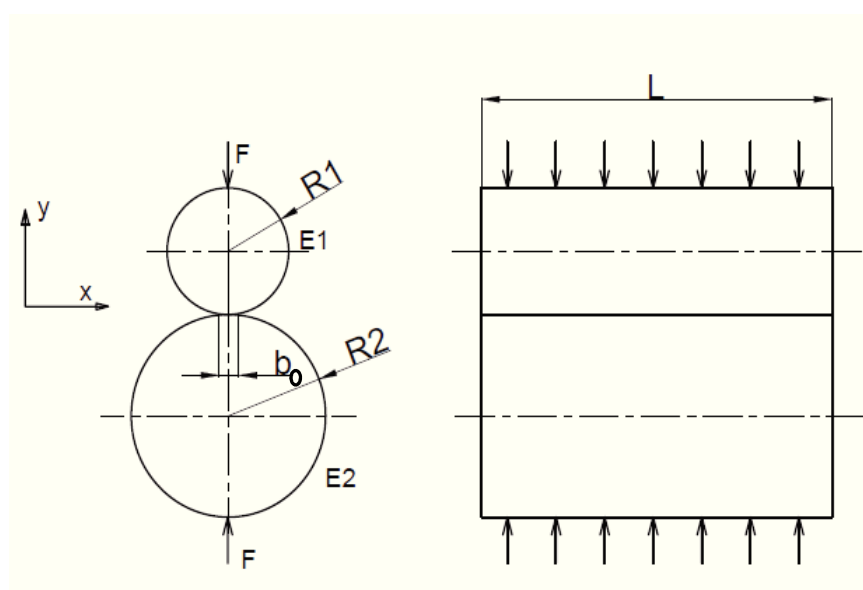
V praxi dochází u řady strojních aplikací ke kontaktu dvou nebo více těles. V zásadě rozlišujeme mezi dvěma obecně zakřivenými tělesy dva základní druhy kontaktu, a to liniový a bodový. Následující kapitola pojednává o způsobu nalezení jednotlivých složek tenzoru napjatosti u obou, výše zmíněných, typů kontaktů.

2.1. Obecné poznatky Hertzovy teorie

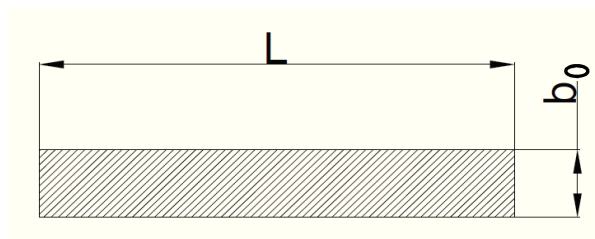
Při vzájemném silovém působení dvou válců se vlivem místní deformace mezi nimi vytvoří tzv. kontaktní plocha. V místě dotyku válců vzniká tlak, který nazýváme kontaktní tlak. Velikost tohoto tlaku lze vypočítat pomocí tzv. Hertzovy teorie [1].

Abychom, mohli Hertzovou teorii aplikovat na kontaktní úlohy, musí být splněny následující podmínky [1]:

1. Tělesa musí být homogenní a izotropní. Pohybujeme se v oblasti Hookova zákona, tudíž nárůst deformace je lineární.
2. Mezi kontaktními plochy nedochází ke tření.
3. Rozměry dotýkajících se válců jsou mnohem větší než rozměry deformované kontaktní plochy.
4. Geometrii kontaktních ploch lze vyjádřit polynomem druhého stupně a kontaktní plochy jsou spojitě. Pokud se tělesa dotýkají v singulárních bodech, Hertzova teorie neplatí.



Obrázek 1: Vznik liniového kontaktu mezi dvěma válci s rovnoběžnými osami



Obrázek 2: Kontaktní plocha

Na obrázku 2. je znázorněn tvar kontaktní plochy pro případ liniového kontaktu. Kontaktní plocha, která vzniká v místě styku dvou na sebe tlačících válců, má tvar obdélníku o šířce b_0 . Šířka b_0 se vypočte ze vzorce (2.1) [1].

Následující vzorce pro výpočet byly převzaty z [2].

$$b = 2,15 \cdot \sqrt{\frac{F}{2} \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{d_2 + d_1} \cdot \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \quad (2.1)$$

Maximální měrný tlak p_0 , který působí ve středu kontaktní plochy ($b_0/2$) je dán rovnicí:

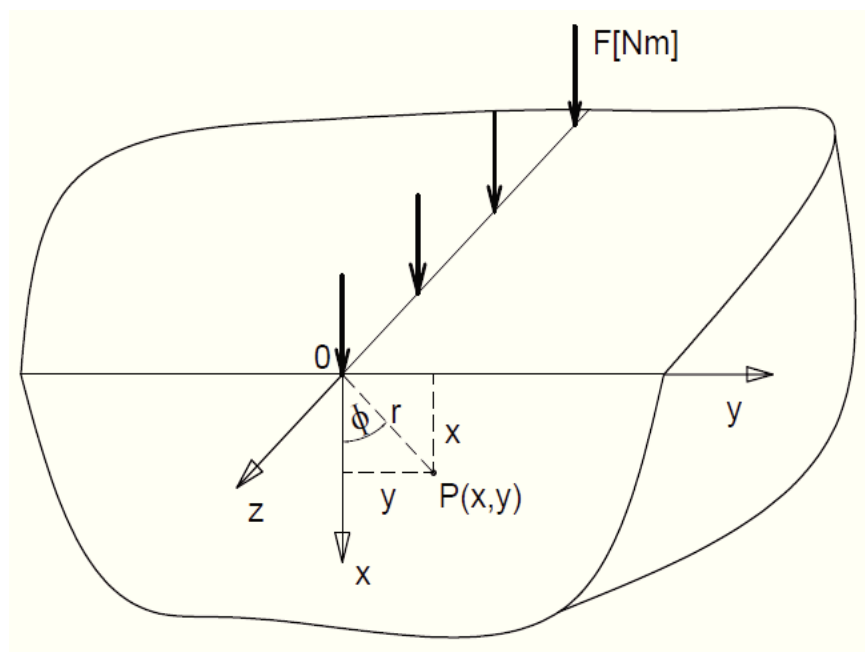
$$p_0 = 0,59 \cdot \sqrt{2 \cdot F \cdot \frac{d_1 + d_2}{d_1 \cdot d_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}} \quad (2.2)$$

Rozložení Hertzova tlaku na kontaktní ploše lze vyjádřit rovnicí paraboly:

$$p_{(x)} = p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot x}{b_0} \right)^2} \quad (2.3)$$

2.2. Nalezení složek tenzoru napjatosti pro případ liniového kontaktu

Liniový kontakt se v praxi vyskytuje v mnohem menší míře oproti bodovému kontaktu. Nutno poznamenat, že v případě liniového kontaktu je možné získat analytické řešení jednotlivých složek tenzoru napjatosti prostřednictvím řešení Flamantovy úlohy [3]. Předpokládejme osamělou liniovou sílu, působící kolmo na hranici pružného poloprostoru (Obrázek 3.).



Obrázek 3: Flamantová úloha

Použijme funkci napětí ve tvaru:

$$\varphi = -\frac{F}{\pi} \cdot r \cdot \phi \cdot \sin \phi \quad (2.4)$$

Lze se přesvědčit, že funkce napětí (2.4) vyhovuje biharmonické rovnici:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Přičemž složky napětí, vyjádřené prostřednictvím funkce napětí - (2.6), (2.7) a (2.8) vyhovují následujícím okrajovým podmínkám: $x=0, |y|>0 \rightarrow \sigma_\phi=0, \tau_{r\phi}=0$ a dále musí platit, že výslednice elementárních vnitřních sil na libovolné části hranice vyjmuté z poloprostoru musí být v rovnováze se silou F . Vztahy pro jednotlivé složky napětí, včetně dosazení funkce napětí, jsou následující:

$$\sigma_\phi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (2.6)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \quad (2.7)$$

$$\tau_{r\phi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right). \quad (2.8)$$

Dosadíme-li funkci napětí (2.4) do vztahů (2.6), (2.7) a (2.8) dostáváme:

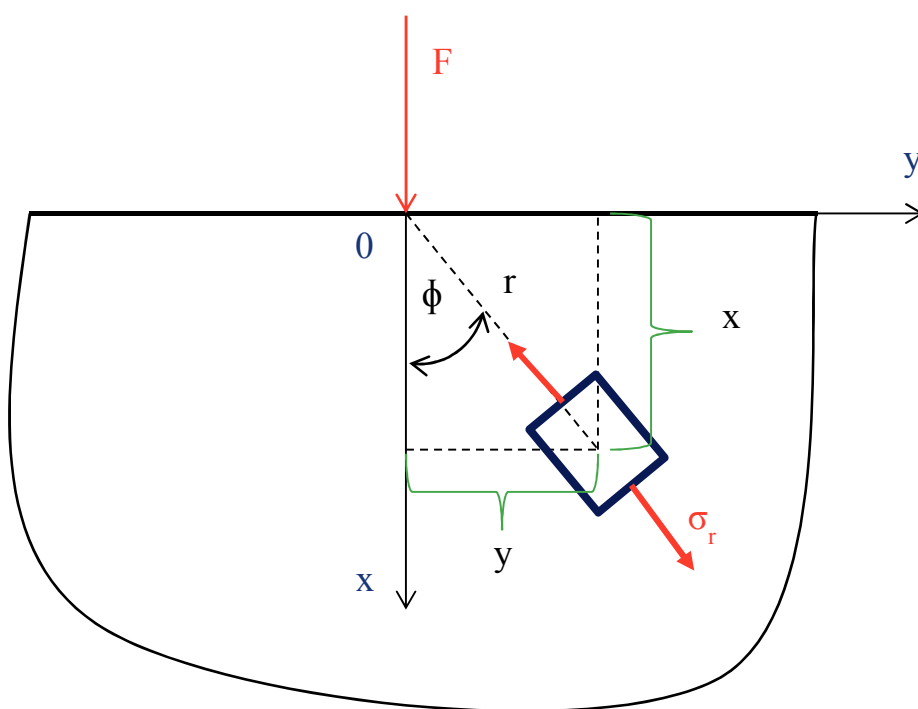
$$\sigma_{\phi} = 0 \quad (2.9)$$

$$\sigma_r = -\frac{2 \cdot F}{\pi} \cdot \frac{\cos \phi}{r} \quad (2.10)$$

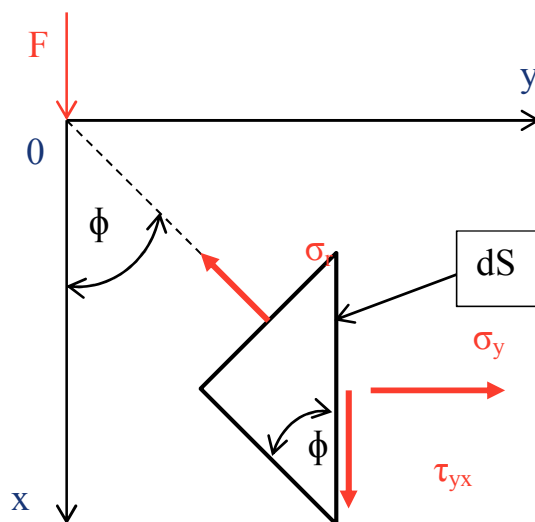
$$\tau_{r\phi} = 0 \quad (2.11)$$

kde σ_{ϕ} vyjadřuje obvodové napětí, σ_r určuje radiální napětí a $\tau_{r\phi}$ je smykové napětí.

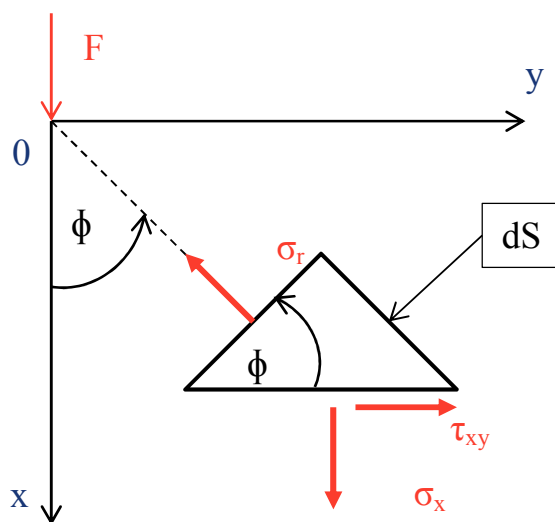
V dalším kroku je důležité, aby funkce pro radiální napětí σ_r byla vyjádřena pomocí složek napětí v kartézských souřadnicích. To je možné provést s využitím podmínky rovnováhy sil v horizontálním (Obrázek 6.) a vertikálním řezu (Obrázek 5.) elementární krychle (Obrázek 4.).



Obrázek 4: Působící radiální napětí na element



Obrázek 5: Vertikální řez elementární krychle



Obrázek 6: Horizontální řez elementární krychle

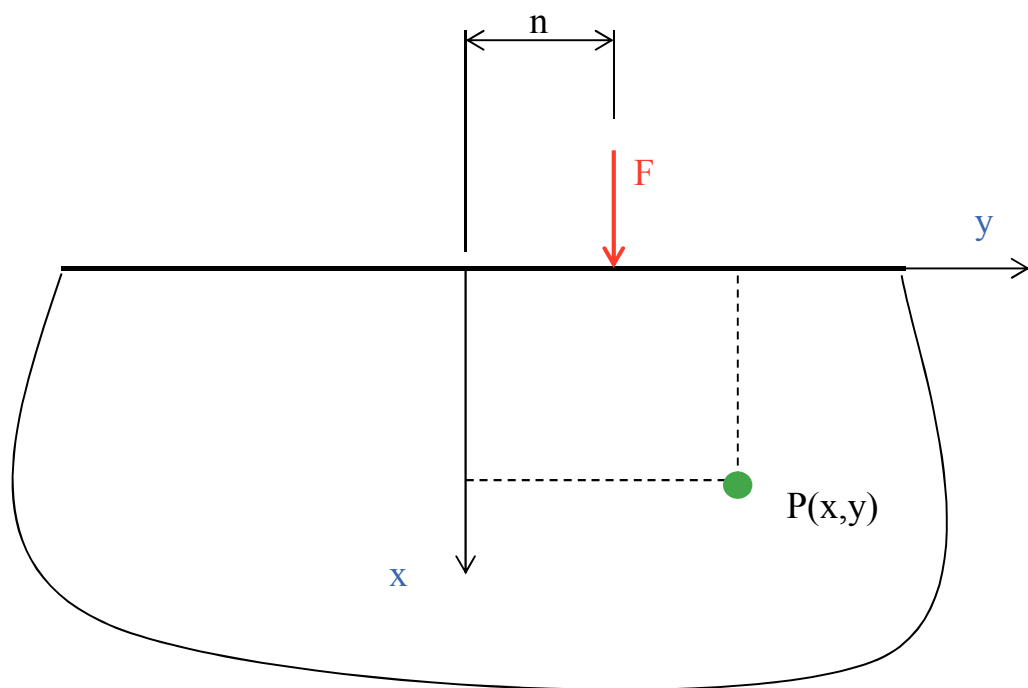
Za pomoci výše uvedených obrázků (Obrázek 5, Obrázek 6) sestavíme rovnice rovnováhy ve směru osy x a y . Po úpravách rovnic rovnováhy dostaneme vztahy pro výpočet normálových složek napětí v ose x a y (σ_x , σ_y) a smykového napětí (τ_{xy}).

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.12)$$

$$\sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{x \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.13)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{x^2 \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.14)$$

Pokud bude síla F působit ve vzdálenosti n (mimo počátek souřadnic), tak jak je uvedeno na Obrázku 7, je potřeba upravit rovnice (2.12), (2.13) a (2.14). Jednotlivé složky napětí pak mají tvar, tak jak jsou uvedeny ve vztazích (2.15), (2.16) a (2.17).



Obrázek 7: Působíště síl je vodorovně posunuto po hranici poloprostoru mimo souřadný systém

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{F \cdot x^3}{(x^2 + (y-n)^2)^2} \right] \quad (2.15)$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{F \cdot x \cdot (y-n)^2}{(x^2 + (y-n)^2)^2} \right] \quad (2.16)$$

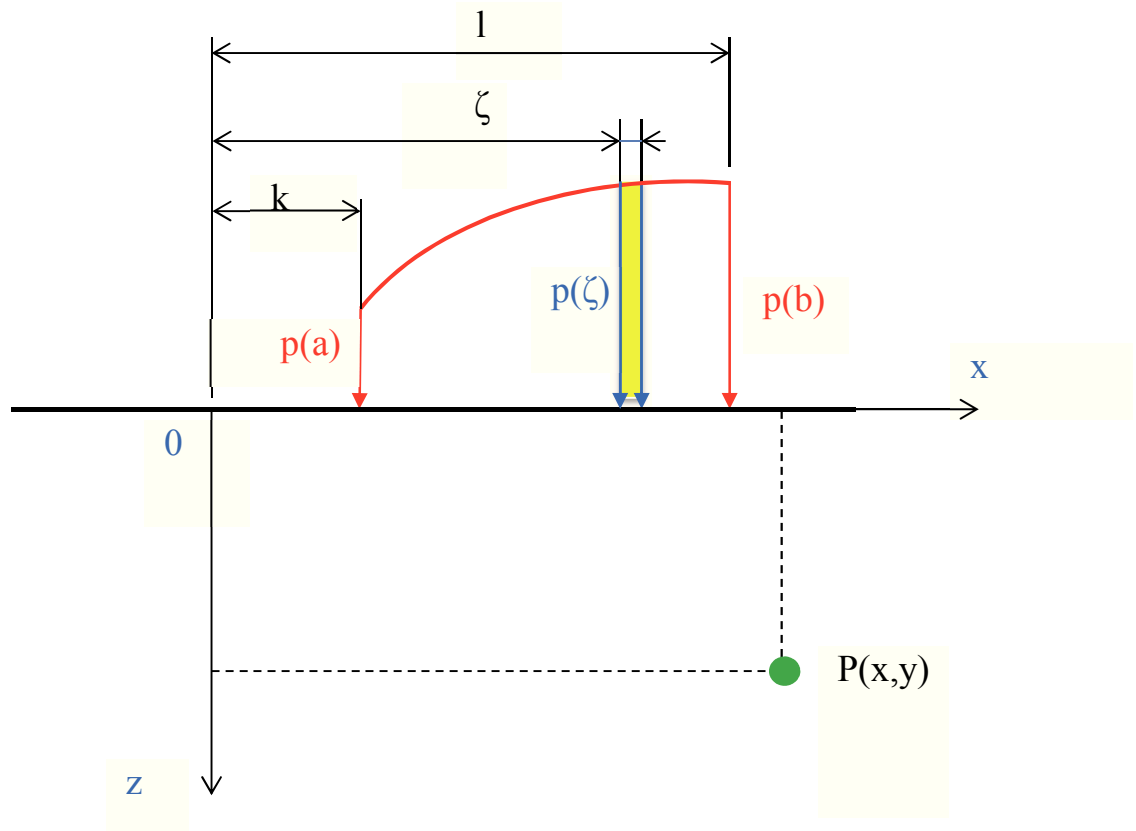
$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{F \cdot x^2 \cdot (y-n)}{(x^2 + (y-n)^2)^2} \right] \quad (2.17)$$

V případě, že bude na hranici pružného poloprostoru působit tlakové zatížení o určitém průběhu (Obrázek 8), a navíc, zaměníme-li souřadné osy tak, jak je zobrazeno na následujícím obrázku (Obrázek 8), je možné vztahy (2.15),(2.16) a (2.17) modifikovat do následující podoby:

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \int_{p(a)}^{p(b)} \frac{p(\zeta) \cdot (x-\zeta)^2 \cdot z}{((x-\zeta)^2 + z^2)^2} d\zeta \quad (2.18)$$

$$\sigma_z = -\frac{2}{\pi} \int_{p(a)}^{p(b)} \frac{p(\zeta) \cdot z^3}{((x-\zeta)^2 + z^2)^2} d\zeta \quad (2.19)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2}{\pi} \int_{p(a)}^{p(b)} \frac{p(\zeta) \cdot (x-\zeta) \cdot z^2}{((x-\zeta)^2 + z^2)^2} d\zeta \quad (2.20)$$



Obrázek 8: Působící tlakové zatížení na hranici pružného poloprostoru

Tlakové zatížení bude v našem případě reprezentovat Hertzovo rozložení normálového tlaku $p(\zeta)$. V případě, že $k = -a$, $l = a$, pak je $p(\zeta)$ ve tvaru:

$$p(\zeta) = p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{a}\right)^2}, \quad (2.21)$$

kde p_0 určuje maximální Hertzův tlak ve středu kontaktu a a určuje šířku hlavní poloosy.

2.3. Nalezení složek tenzoru napjatosti pro případ bodového kontaktu

Řešení jednotlivých složek tenzoru napjatosti se realizuje na základě teorie potenciálů [4], s předpokladem, že se pohybujeme v lineární oblasti Hookova zákona a dále také předpokládáme Hertzovo rozložení tlaku nad eliptickou oblastí. Výsledkem jsou následující vztahy pro jednotlivé složky tenzoru napjatosti \mathbf{A}_σ [4]:

$$\sigma_x = p_0 \cdot \left[\left(\frac{\nu}{\pi} \right) \cdot \frac{\phi_3}{p_0} - \frac{(1-2\nu)}{2\pi} \cdot \frac{\chi_{11}}{p_0} - \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{z \cdot \phi_{11}}{p_0} \right) \right] \quad (2.22)$$

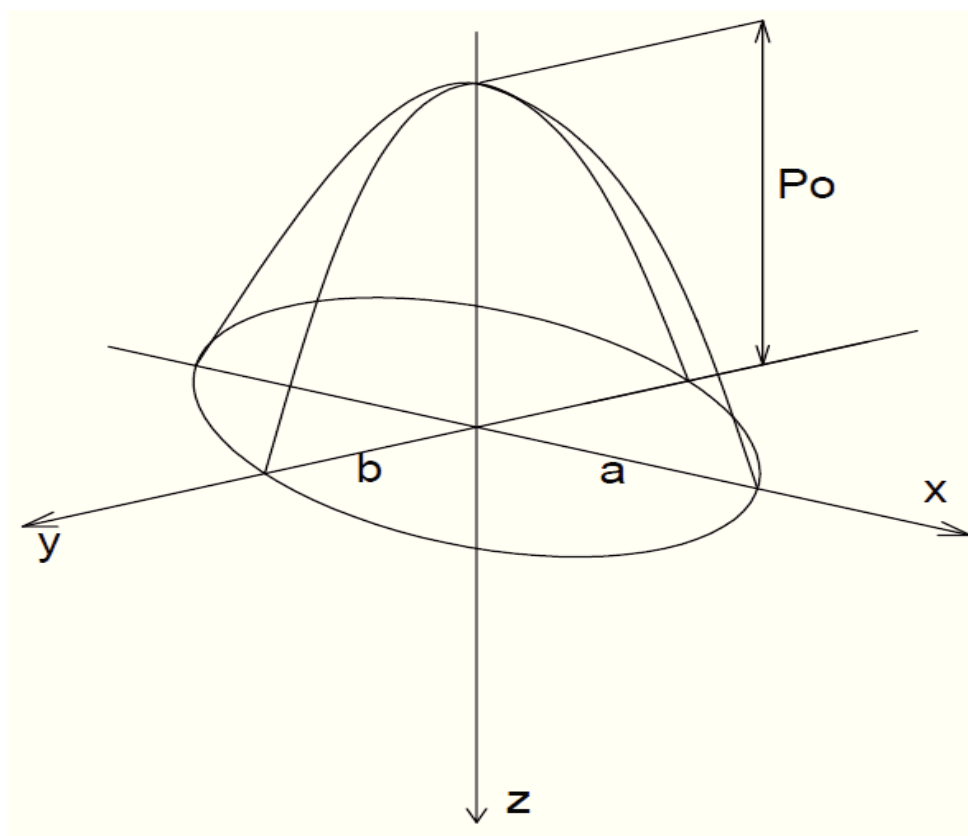
$$\sigma_y = p_0 \cdot \left[\left(\frac{\nu}{\pi} \right) \cdot \frac{\phi_3}{p_0} - \frac{(1-2\nu)}{2\pi} \cdot \frac{\chi_{22}}{p_0} - \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{z \cdot \phi_{22}}{p_0} \right) \right] \quad (2.23)$$

$$\sigma_z = p_0 \cdot \frac{-k \cdot z^2 \cdot L}{s^2} \quad (2.24)$$

$$\tau_{xy} = -p_0 \cdot \left[\frac{(1-2\nu)}{2\pi} \cdot \frac{\chi_{12}}{p_0} - \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{z \cdot \phi_{12}}{p_0} \right) \right] \quad (2.25)$$

$$\tau_{xz} = p_0 \cdot \frac{-k \cdot x \cdot z \cdot L}{(1+s^2)} \quad (2.26)$$

$$\tau_{yz} = p_0 \cdot \frac{-k \cdot y \cdot z \cdot L}{(k^2 + s^2)} \quad (2.27)$$



Obrázek 9. Hertzovo rozložení tlaku nad kontaktní plochou včetně souřadného systému

Kde x , y a z jsou souřadnice, p_0 je maximální tlak ve středu kontaktní elipsy, a vyjadřuje hlavní poloosu, k vyjadřuje poměr hlavní a vedlejší poloosy (a/b), s je definováno jako y/a^2 , přičemž y je největší kořen rovnice:

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + \gamma} - \frac{y^2}{b^2 + \gamma} - \frac{z^2}{\gamma} = 0 \quad (2.28)$$

Proměnné L , resp. H jsou definovány následovně:

$$L = \frac{z}{\sqrt{s^3 \cdot H \cdot \sqrt{((1+s^2) \cdot (k^2 + s^2))}}} \quad (2.29)$$

$$H = \left(\frac{x}{1+s^2} \right)^2 + \left(\frac{y}{k^2 + s^2} \right)^2 + \left(\frac{z}{s^2} \right)^2 \quad (2.30)$$

Dále platí:

$$\left(\frac{z \cdot \phi_{11}}{p_0} \right) = -2k\pi \cdot \left\{ z \cdot I_1 - \left(\frac{x \cdot s}{1+s^2} \right)^2 \cdot L \right\} \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{z \cdot \phi_{22}}{p_0}\right) = -2k\pi \cdot \left\{ z \cdot I_2 - \left(\frac{y \cdot s}{1+s^2}\right)^2 \cdot L \right\} \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{z \cdot \phi_{12}}{p_0}\right) = \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot x \cdot y \cdot L \cdot s^2}{(1+s^2) \cdot (k^2 + s^2)} \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{\phi_3}{p_0}\right) = -2 \cdot \pi \cdot k \cdot z \cdot I_3 \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{\chi_{11}}{p_0}\right) = -2k\pi \cdot \left\{ z \cdot I_1 - \frac{1}{n^3} \cdot \left[y \cdot \tan^{-1}\left(\frac{Y \cdot (\alpha-1)}{1+Y^2 \cdot \alpha}\right) + x \cdot \tanh^{-1}\left(\frac{X \cdot (\alpha-1)}{1-X^2 \cdot \alpha}\right) + n - \frac{z \cdot n}{s} \cdot \sqrt{\frac{s^2+k^2}{s^2+1}} \right] \right\} \quad (2.35)$$

$$\left(\frac{\chi_{22}}{p_0}\right) = -2k\pi \cdot \left\{ z \cdot I_2 + \frac{1}{n^3} \cdot \left[y \cdot \tan^{-1}\left(\frac{Y \cdot (\alpha-1)}{1+Y^2 \cdot \alpha}\right) + x \cdot \tanh^{-1}\left(\frac{X \cdot (\alpha-1)}{1-X^2 \cdot \alpha}\right) + n - \frac{z \cdot n}{s} \cdot \sqrt{\frac{s^2+1}{s^2+k^2}} \right] \right\} \quad (2.36)$$

$$\left(\frac{\chi_{12}}{p_0}\right) = \frac{2k\pi}{n^3} \cdot \left\{ x \cdot \tan^{-1}\left(\frac{Y \cdot (\alpha-1)}{1+Y^2 \cdot \alpha}\right) - y \cdot \tanh^{-1}\left(\frac{X \cdot (\alpha-1)}{1-X^2 \cdot \alpha}\right) \right\} \quad (2.37)$$

Kde:

$$X = \frac{x \cdot n}{1-p^2} \quad Y = \frac{y \cdot n}{k^2-p^2} \quad (2.38)$$

p je nejmenší kořen rovnice:

$$\frac{x^2}{1-p^2} + \frac{y^2}{k^2-p^2} = 1 \quad (2.39)$$

Pro α^2 a n^2 platí následující vztahy:

$$\alpha^2 = \frac{(s^2+p^2) \cdot (k^2-p^2)}{(k^2-p^2) \cdot (s^2+p^2) + n^2 \cdot y^2} \quad n^2 = 1-k^2 \quad (2.40)$$

I_1 , I_2 a I_3 jsou eliptické integrály definované následovně:

$$I_1 = \int_s^\infty \frac{dw}{(1+w^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (k^2+w^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.41)$$

$$I_2 = \int_s^\infty \frac{dw}{(1+w^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (k^2+w^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.42)$$

$$I_3 = \int_s^\infty \frac{dw}{w^2 \cdot (1+w^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (k^2+w^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.43)$$

V případě evaluace složek tenzoru napjatosti v rovině symetrie XZ platí následující vztahy:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.44)$$

Složky σ_x a σ_y jsou definovány následovně:

$$\sigma_x = p_0 \cdot \left[-2 \cdot k \cdot (1+\nu) \cdot z \cdot I_3 - \frac{\sigma_y}{p_0} - \frac{\sigma_z}{p_0} \right] \quad (2.45)$$

$$\sigma_y = p_0 \cdot k \cdot (-2 \cdot \nu \cdot z \cdot I_3 + 2 \cdot (1-\nu) \cdot z \cdot I_2 - (1-2\nu) \cdot I_4) \quad (2.46)$$

Kde pro $q \neq 0$ je integrál I_4 vyjádřen následovně:

$$I_4 = \frac{q_0}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{x}{q_0}\right)^2 + r^2 \cdot \text{sign}(q^2)} - \left|\frac{x}{q_0}\right| \cdot \ln \left| \frac{\left|\frac{x}{q_0}\right| + \sqrt{\left(\frac{x}{q_0}\right)^2 + r^2 \cdot \text{sign}(q^2)}}{r} \right| \right] \quad (2.47)$$

V případě, že je q rovno nule, platí:

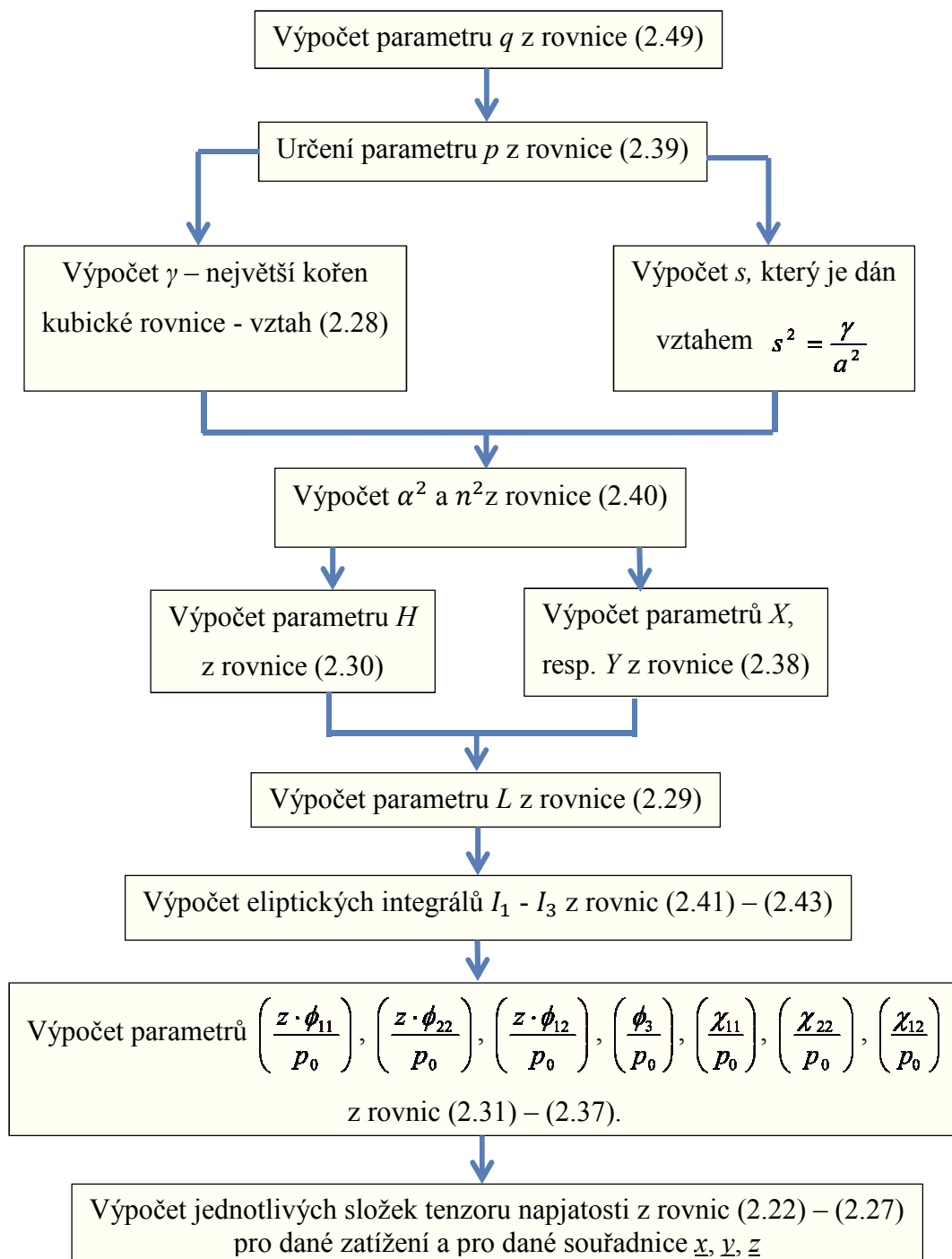
$$I_4 = \frac{x}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \ln(r) \quad (2.48)$$

Pro q , r a q_0 platí:

$$q^2 = 1 - k^2 - x^2 \quad r^2 = \frac{1+s^2}{k^2+s^2} \quad q_0 = \sqrt{|q^2|} \quad (2.49)$$

2.3.1 Postup výpočtu:

Vstupními parametry jsou souřadnice x, y, z , velikost poloosy a , velikost poloosy b , modul pružnosti E , Poissonovo číslo μ . Pomocí zadaných parametrů lze určit všech šest složek tenzoru napjatosti v bodě $[x,y,z]$ v závislosti na velikosti kontaktní plochy, maximálnímu kontaktnímu tlaku p_0 a materiálových parametrech E resp. μ . Postup výpočtu je uveden ve vývojovém diagramu na obrázku 10.



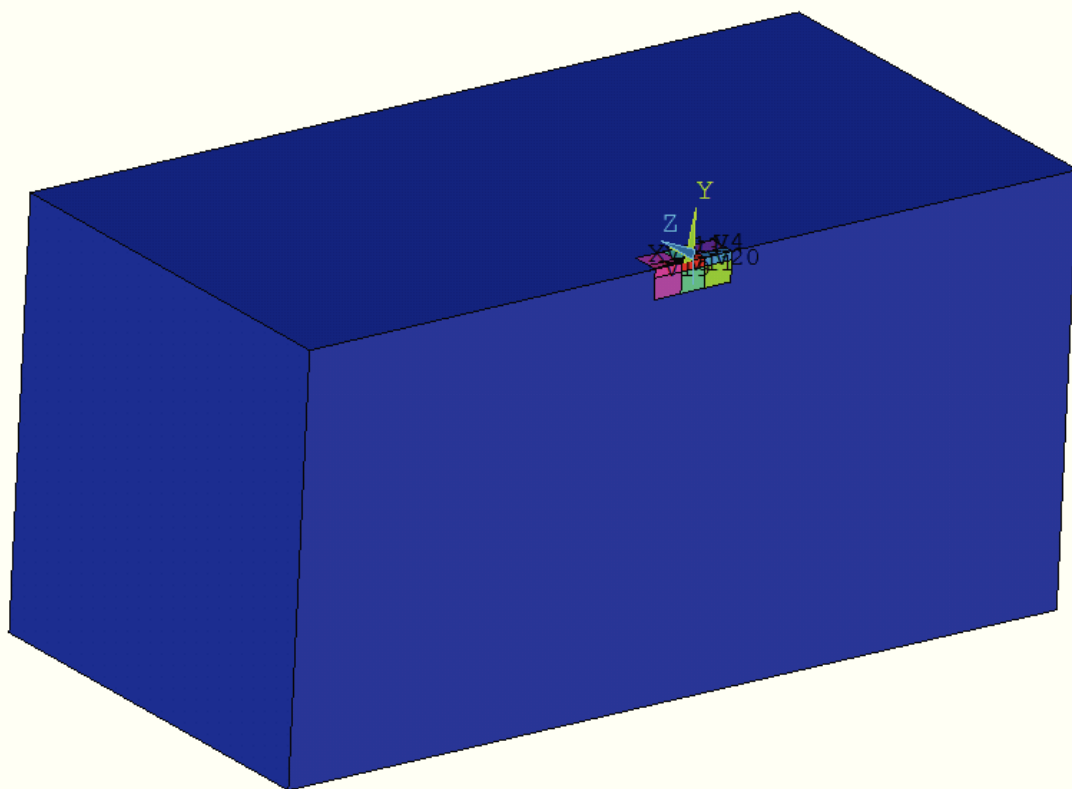
Obrázek 10: Vývojový diagram – postup výpočtu.

3. Využití metody konečných prvků pro nalezení složek tenzoru napjatosti u bodového styku dvou těles

V následující kapitole se zaměříme na nalezení složek tenzoru napjatosti s využitím MKP přístupu. MKP řešení se bude sestávat z kvádru zatíženého eliptickou kontaktní plochou s Hertzovým rozložením tlaku. Nespornou výhodou MKP přístupu je možnost mít libovolný tvar kontaktní plochy (od elipsy až po komplexnější tvary) včetně různých průběhů tlaků nad danou oblastí.

3.1. Geometrický model

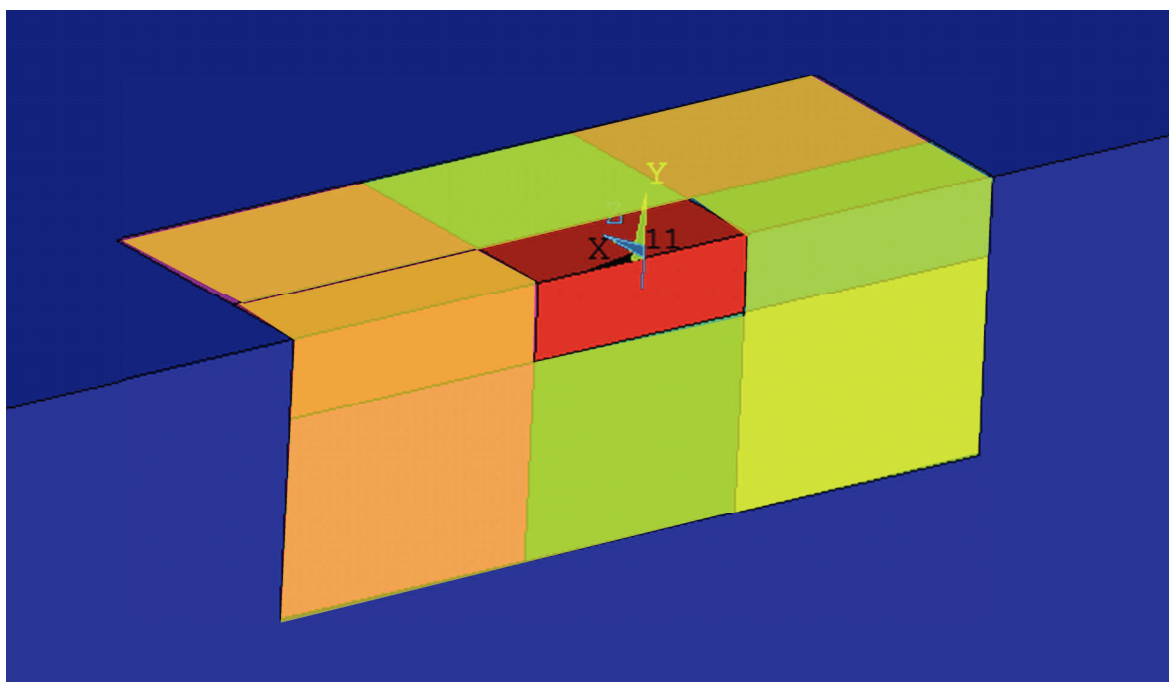
Na následujícím obrázku je znázorněno těleso ve tvaru kvádru, suplující poloprostor. Předpokladem takto koncipovaného řešení je to, že rozměry kvádru ve všech třech osách budou mnohonásobně větší než samotný rozměr kontaktní elipsy. Nutno poznamenat, že je při řešení možné využít podmínku symetrie a tím pádem řešit pouze $\frac{1}{2}$ modelu. Pro potřeby výpočtu byl vytvořen kvádr o rozměrech 100x50x50 mm (rozměr v ose x, rozměr v ose y, rozměr v ose z)



Obrázek 11. Kvádr o rozměrech 100x50x50 [mm]

Z důvodu vyšší kvality sítě konečných prvků v místě zatížení je kvádr rozdělen na řadu podoblastí (viz obrázek č. 12.), které jsou vzájemně svázány funkcí *glue* [5]. Výhodou funkce *glue* je to, že při tzv. slepení objemů dojde k zachování hraničních ploch –

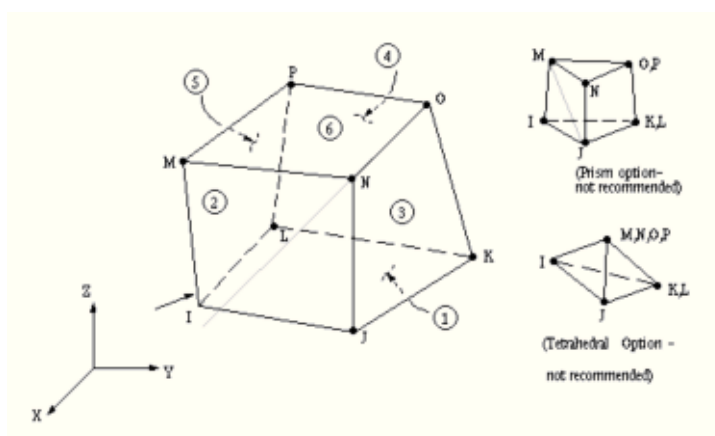
z původně dvou sousedních ploch Ansys vytvoří pouze jednu, kterou oba hraniční objemy sdílejí. Tuto vlastnost využijeme při následujícím síťování modelu. Rozměr podobjemu, který byl vytvořen prostřednictvím funkce *glue* je následující: 10x4x3 mm (délka v ose x, hloubka v ose y, šířka v ose z)



Obrázek 12: Rozdělení na podobjem

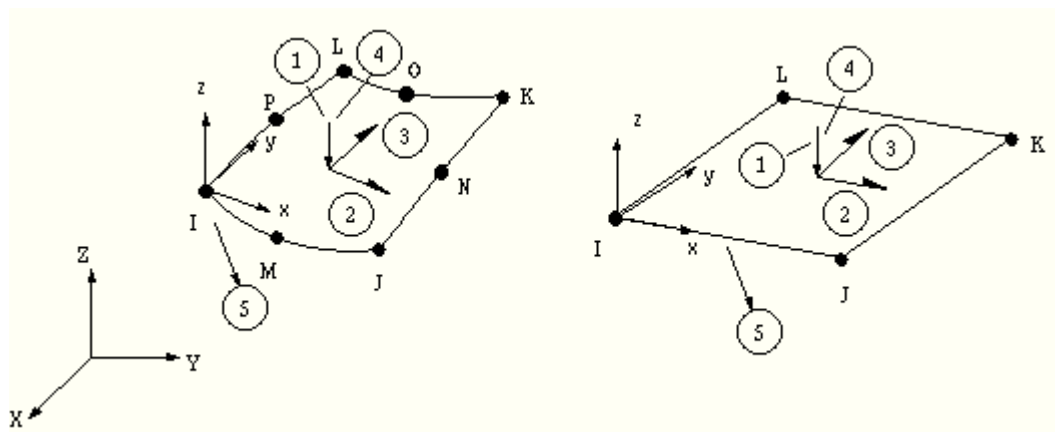
3.2. Tvorba konečnoprvkové sítě

Pro účely tvorby sítě byly použity prvky SOLID 185 a SURF 154. V případě prvku SOLID 185 se jedná o osmiuzlový 3D element se třemi stupni volnosti v každém z uzlů (posuvy v osách x,y,z) [5].



Obrázek 13: Prvek SOLID 185

Prvek SURF 154 je využíván k aplikaci různých druhů plošných zatížení u 3D analýz. V našem případě nám umožňuje na danou plochu definovat normálové zatížení, které je vyjádřeno prostřednictvím funkce/tabulky [5].

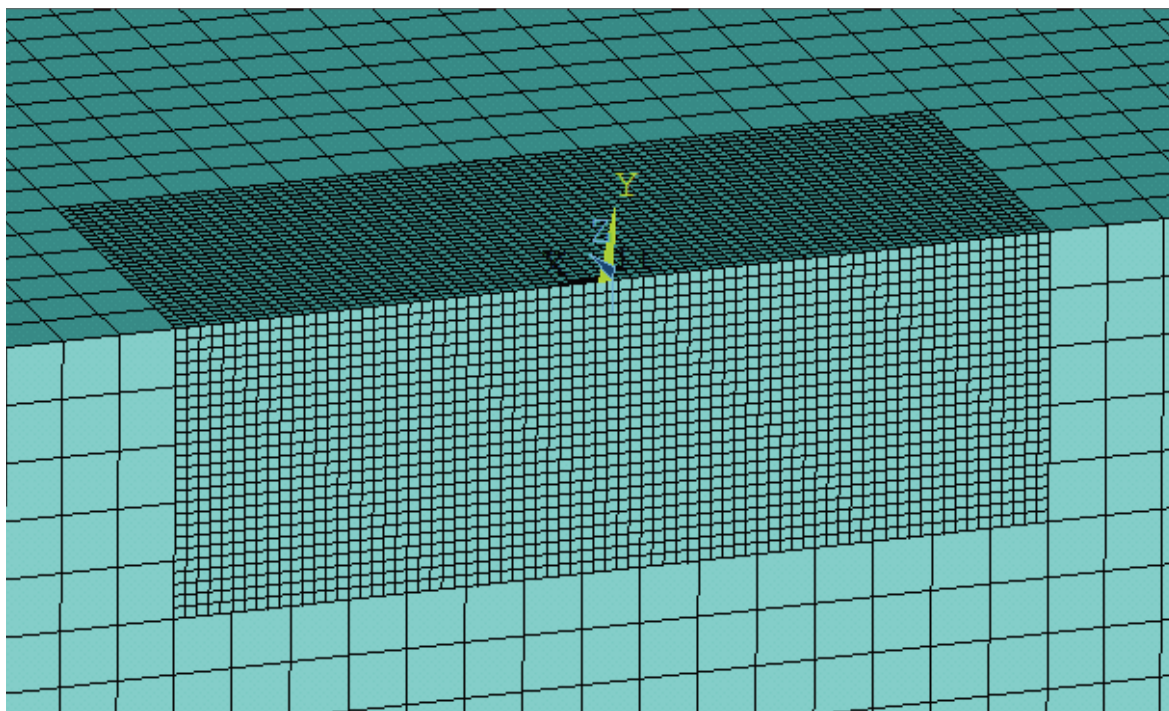


Obrázek 14: Prvek SURF 154

Při řešení jsme využili izotropní, homogenní materiálový model s následujícími parametry:

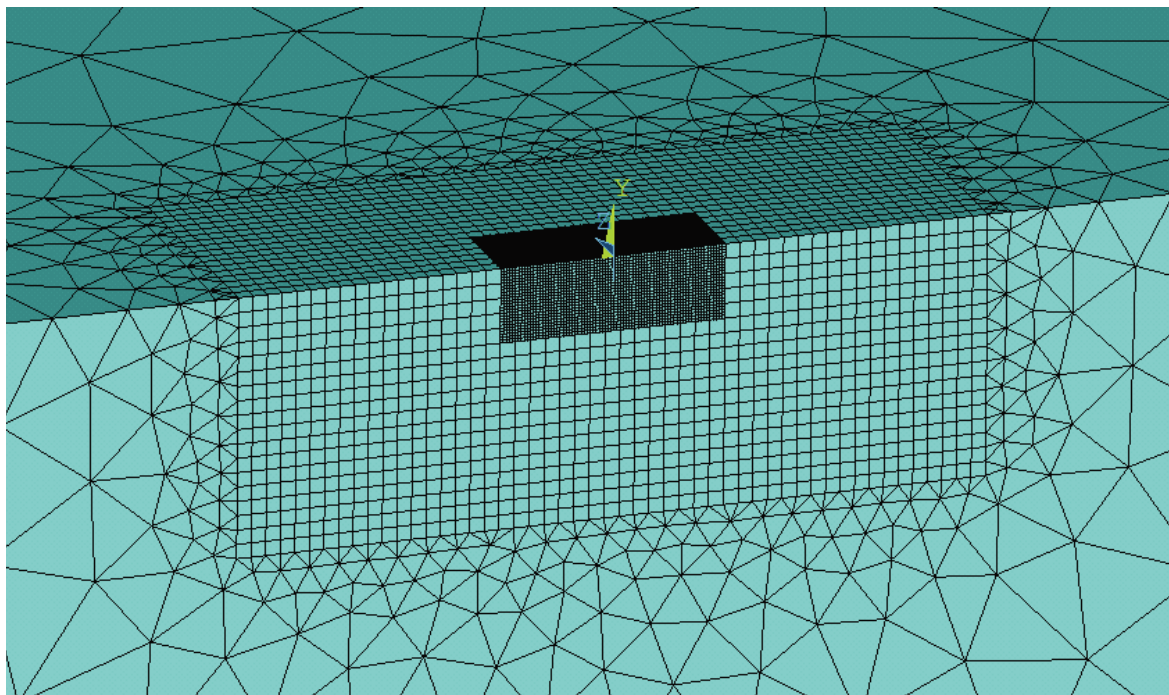
- Modul pružnosti E [MPa]: 210000
- Poissonovo číslo μ [-]: 0.3

V prvním kroku byl síťován podobjem o velikosti $3 \times 1 \times 1,2$ mm (délka v ose x , hloubka v ose y , šířka v ose z), na jehož horní ploše bude později definováno zatížení s eliptickou kontaktní plochou (červeně zobrazen – viz Obr. 12). S využitím mapovaného síťování byla vytvořena rovnoměrná síť s elementy o velikosti hrany 0,04 mm.



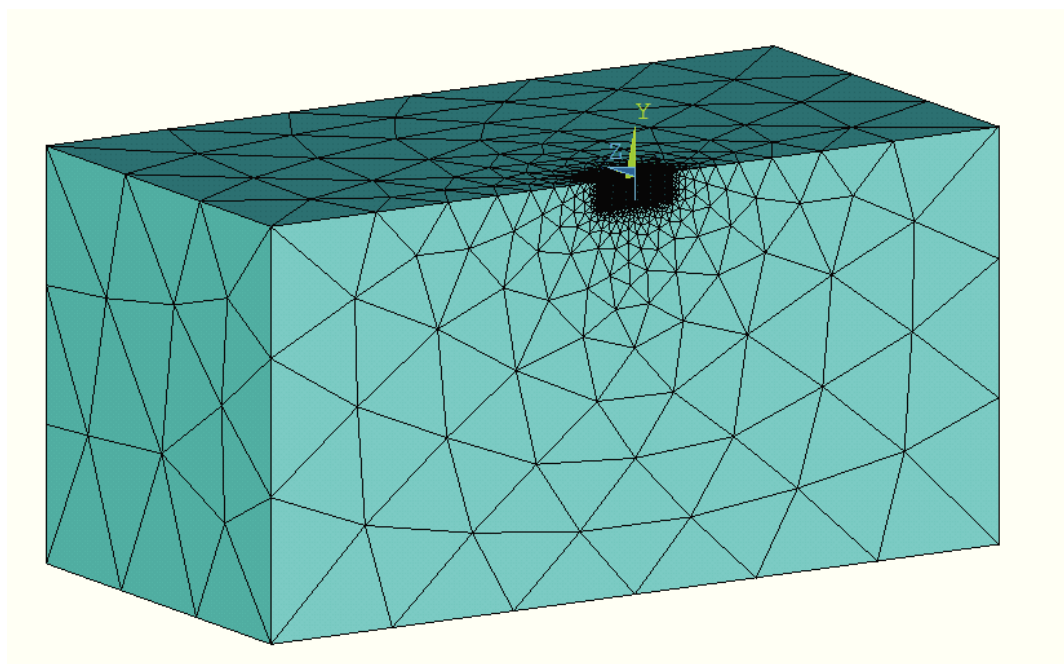
Obrázek 15: Detail podobjemu, na jehož horní ploše bude definováno zatížení.

Díky vhodnému rozdělení objemů bylo možné využít mapovaného síťování i v ostatních podobjemech. Velikost hrany elementu se však nyní pohybovala na hodnotě 0,2 mm.

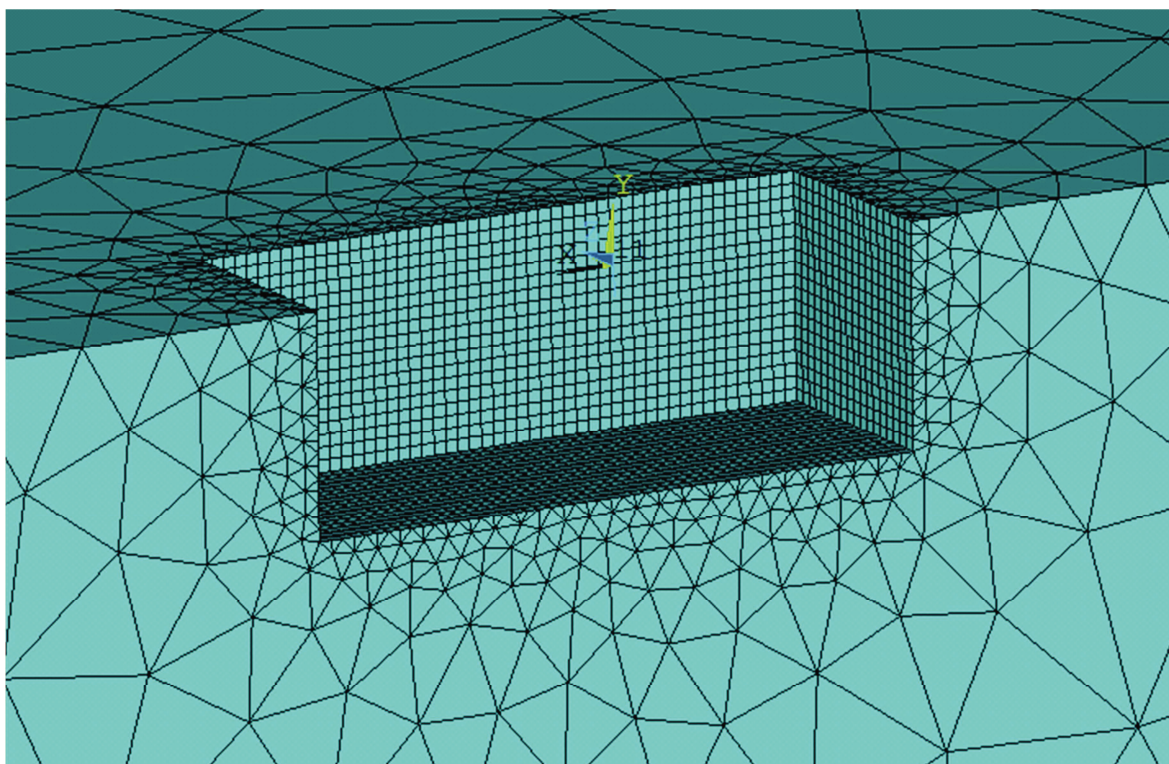


Obrázek 16: Pohled na síťované podobjemy

V následujícím kroku bylo provedeno síťování největšího objemu, a to s použitím tetraedrů (čtyřstěnů). Obrázek 17 znázorňuje celkový pohled na síťovaný model, včetně detailu sítě v místech napojení na hlavní těleso (Obr. 18).

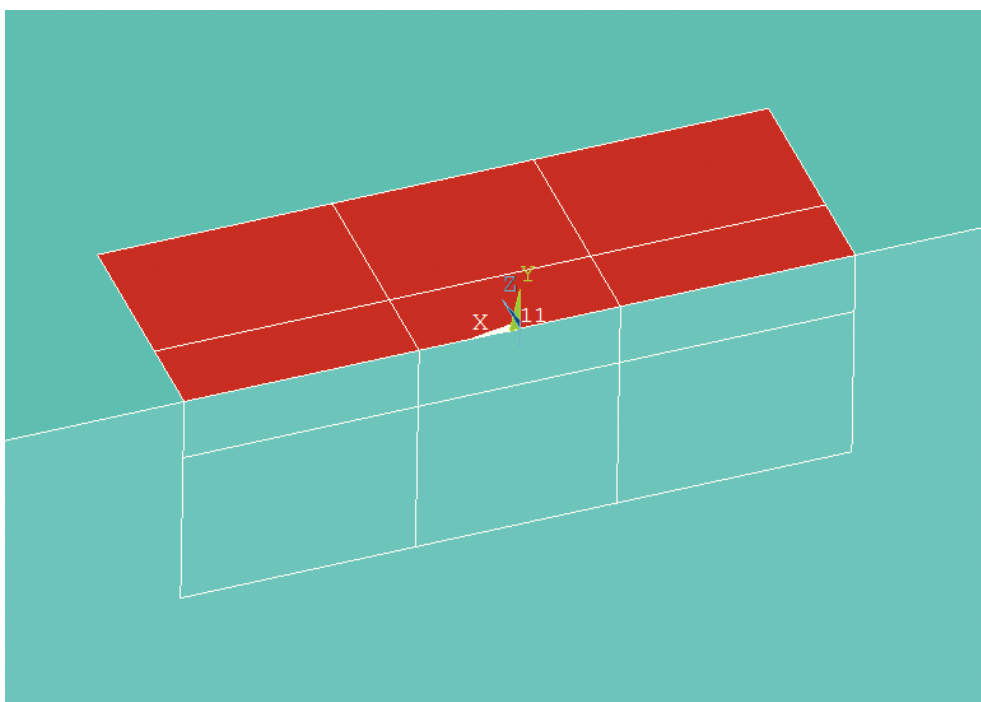


Obrázek 17: Celkový pohled na síťovaný model



Obrázek 18: Detail sítě v místě napojení hlavního objemu na podobjemy.

Celkový počet elementů tělesa je 95 425, přičemž celkový počet uzlů činí 66 291. Podobjem (viz. Obr. 15), v němž bude probíhat evaluace složek tenzoru napjatosti, obsahuje 56 250 elementů a 51 504 uzlů. Na horní plochu zvolených podobjemů (viz obrázek 19) byl aplikován prvek SURF 154, který nám umožňuje definovat zatížení Hertzovým rozložením tlaku s eliptickou kontaktní plochou.



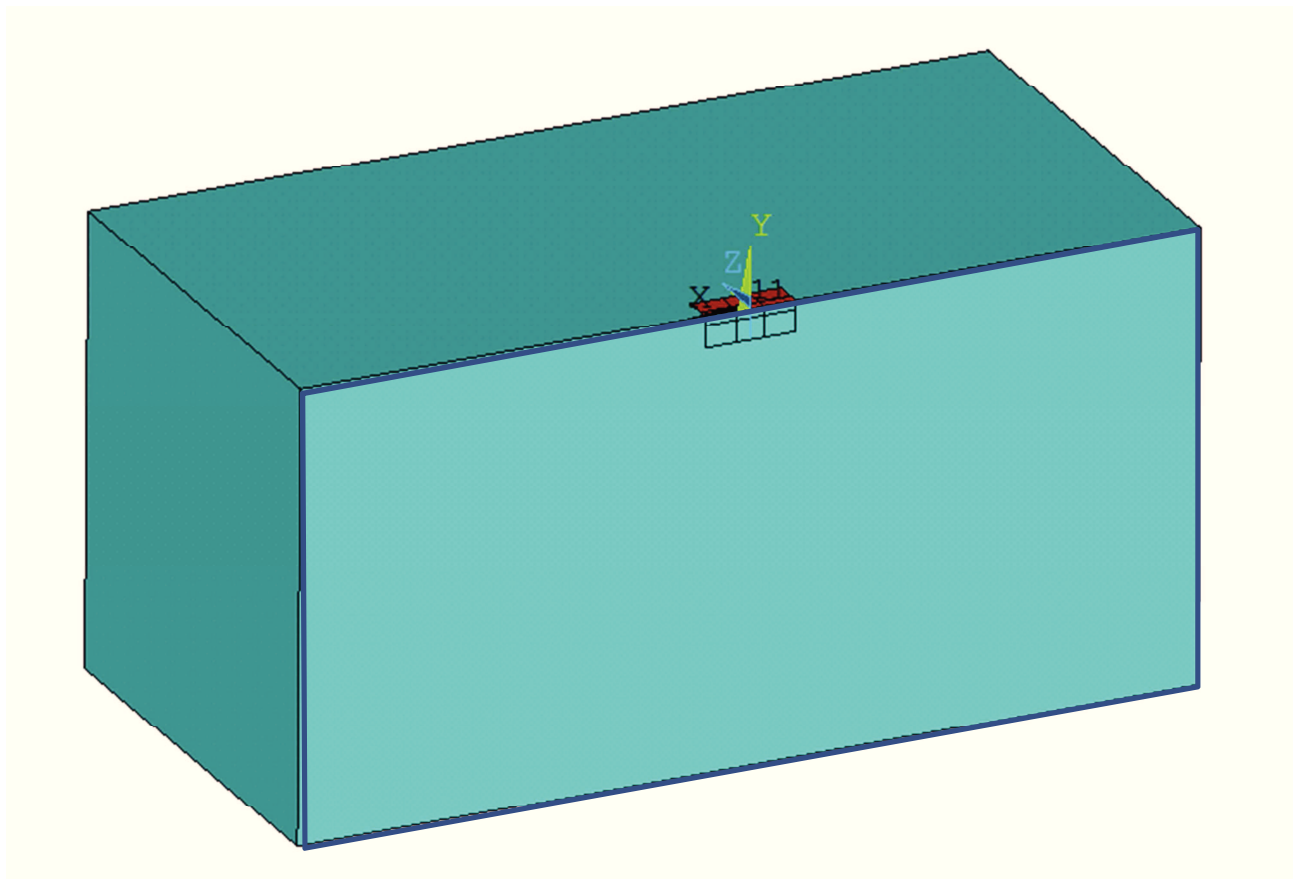
Obrázek 19: Oblast pro síťování prvkem SURF 154 (červeně)

3.3. Okrajové podmínky

V minulém kroku byl popsán postup vytvoření konečnoprvkové sítě. Dalším krokem je definice vazeb a následně také zatížení. U tělesa máme možnost zadávat okrajové podmínky na hrany, plochy či body geometrie, případně na uzly sítě. Pokud je to proveditelné, zadáváme okrajové podmínky vždy na vyšší entitu, raději tedy na plochu než na hranu či na hranu než na bod.

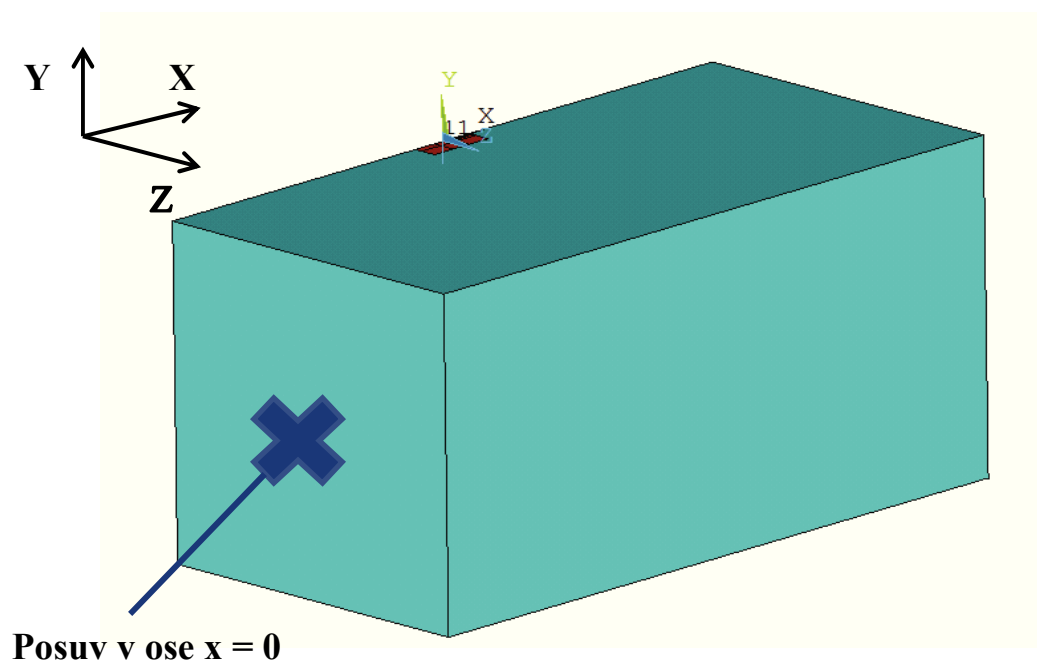
3.3.1. Vazby

Vazby, v případě statické úlohy, musí zajistit jednoznačnou polohu tělesa v prostoru. V prvním kroku jsme na plochu v rovině XY definovali podmínku symetrie (viz obrázek 20), která nám umožňuje řešit pouze $\frac{1}{2}$ modelu. Tímto krokem je možné díky úspoře elementů zkrátit výpočetní čas úlohy. Nutno podotknout, že s ohledem na aplikaci pouze normálového zatížení bylo možné řešit pouze $\frac{1}{4}$ modelu. V budoucnu má autor bakalářské práce v plánu na vytvořeném modelu realizovat simulace včetně aplikace smykového zatížení, u nichž není takto definovaná symetrie možná.



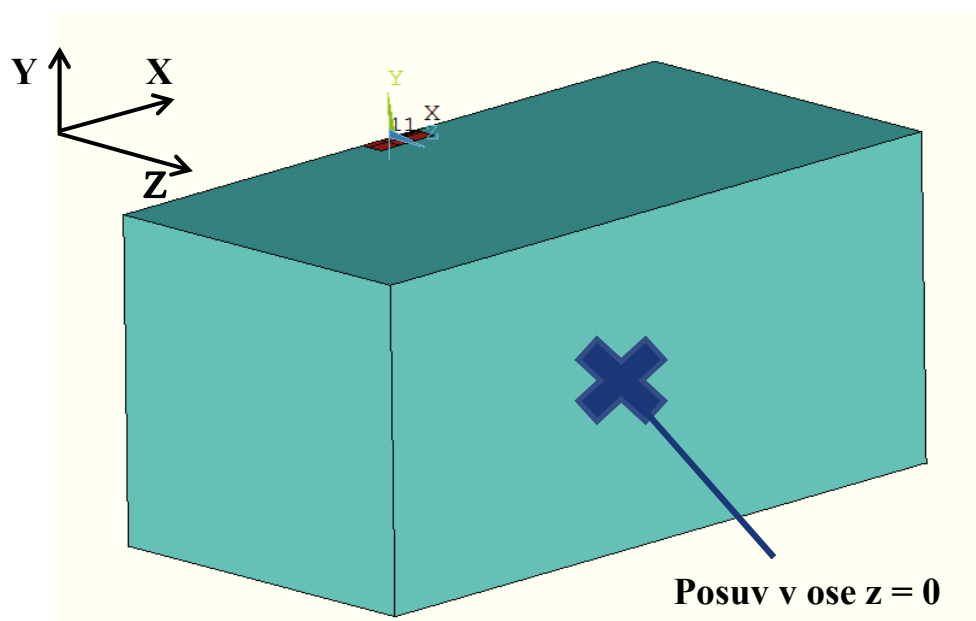
Obrázek 20: Okrajová podmínka symetrie.

Dvěma rovnoběžným plochám, které leží v rovině YZ byl odebrán stupeň volnosti ve formě posuvu v ose x (Obr. 21)



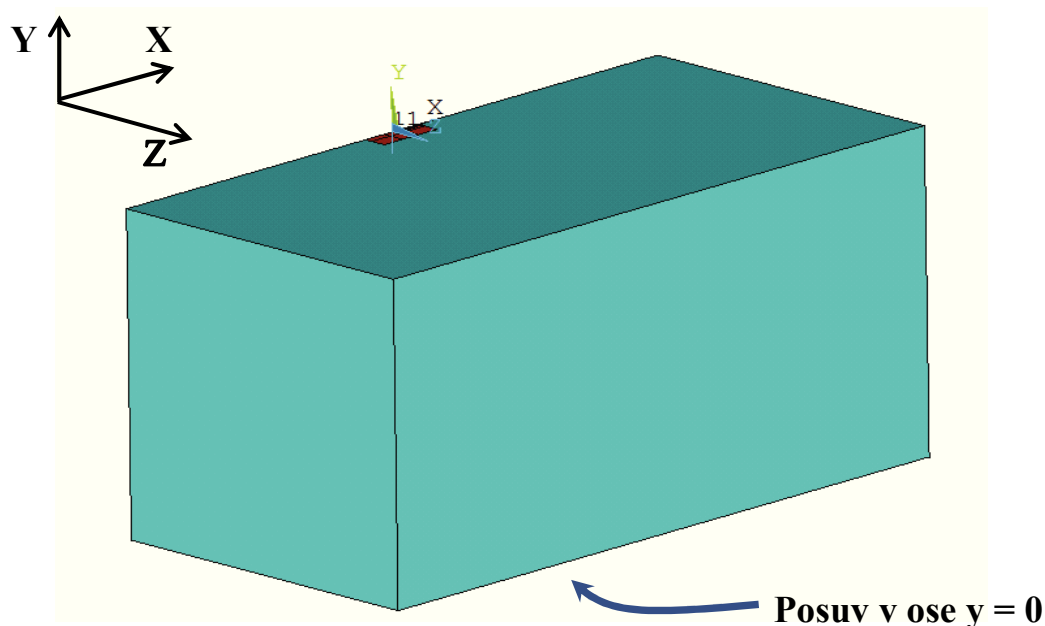
Obrázek 21: Definice okrajových podmínek

Ploše, která je rovnoběžná s rovinou symetrie a která leží v rovině XY, byl odebrán stupeň volnosti ve formě posuvu v ose z (Obr. 22).



Obrázek 22: Definice okrajových podmínek

Spodní ploše rovnoběžné s rovinou XZ byl odebrán stupeň volnosti ve formě posuvu v ose y (Obr. 23).



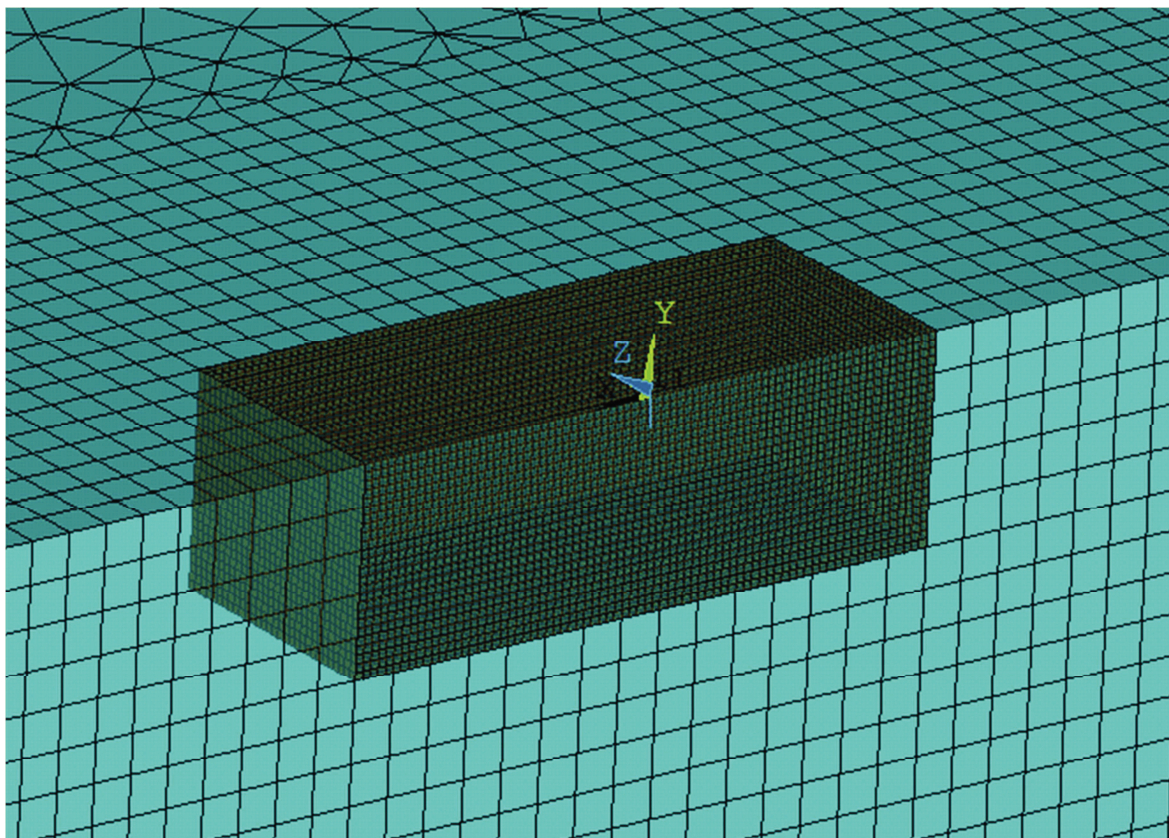
Obrázek 23: Definice okrajových podmínek

3.3.2. Definice kontaktní podmínky

Kontakty mají mnoho využití. Mohou se používat buď jako pevné spojení dvou těles, mohou suplovat vazby nebo zatížení nebo mohou představovat klasický kontakt, který řeší dotyk dvou těles. Kontakt je zvláštní typ okrajové podmínky, kdy neznáme deformace ani síly. Obě hodnoty se musí dopočítat.

Podobjem vzniklý sloučením jednotlivých, menších podobjemů (Obr. 12) pomocí funkce *glue* je rovněž prostřednictvím funkce *glue* napojen na zbytek tělesa. Naproti tomu nejmenší podobjem (Obr. 12, označen červeně) je se zbytkem tělesa spojen prostřednictvím kontaktní podmínky *bonded*. Kontaktní podmínka typu *bonded* neumožňuje oběma povrchům separaci a posuv v tangenciálním směru. Naopak, umožňuje mezi oběma povrchy přenášet rovnoměrně zatížení [5].

Následující obrázek (Obr. 24) zobrazuje plochy, s jejichž pomocí byla definována kontaktní podmínka typu *bonded*. Nutno poznamenat, že plochy ze strany základního objemu figurovaly v kontaktní podmínce jako „target surface“. Plochy ze strany podobjemu figurovaly jako „contact surface“.



Obrázek 24: Rozhraní základního objemu, u něhož byla definována kontaktní podmínka typu bonded

3.3.3. Zatížení

Normálové zatížení povrchu bylo realizováno s využitím funkce, která popisuje zatížení povrchu, s eliptickou kontaktní plochou, tlakem s Hertzovým rozložením nad touto oblastí (rovnice 3.1).

$$p_{(x,y)} = p_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (3.1)$$

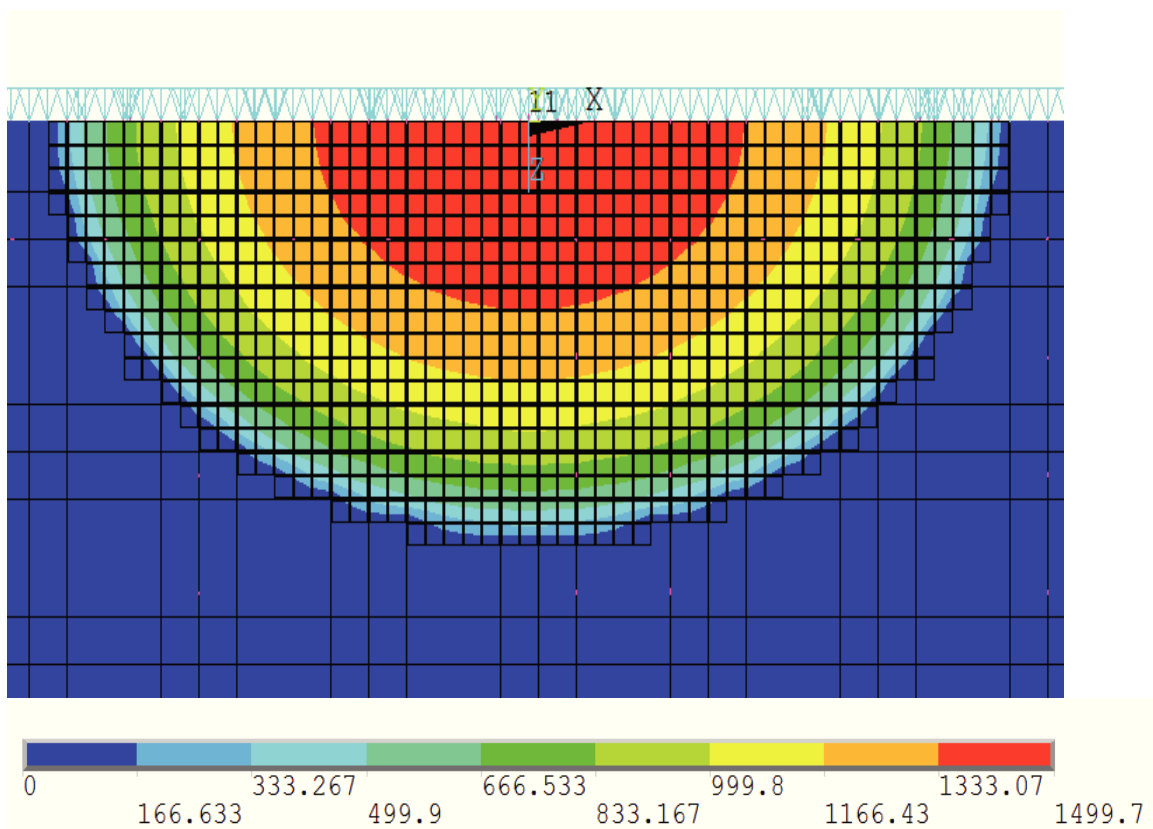
Ve výpočtu byly použity následující parametry:

Velikost hlavní poloosy: $a = 1 \text{ mm}$

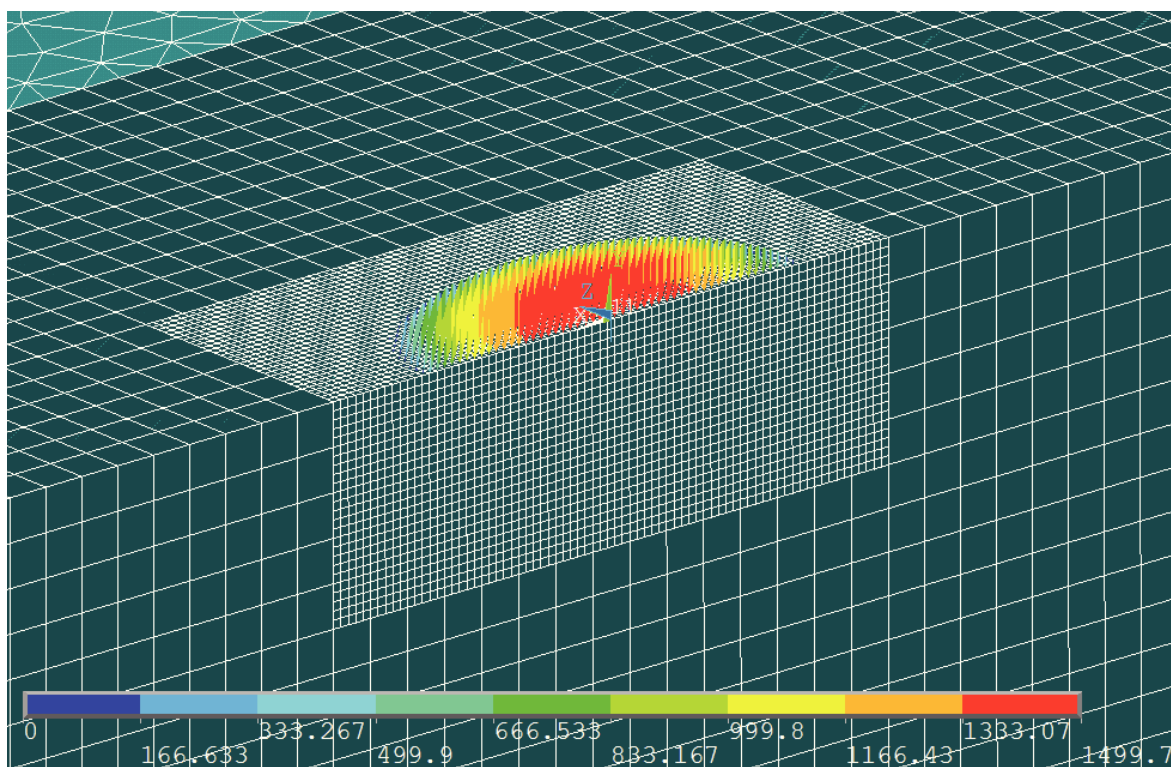
Velikost vedlejší poloosy: $b = 0,7 \text{ mm}$

Maximální kontaktní tlak $p_0 = 1500 \text{ MPa}$

Pro zadání výše uvedené rovnice do Ansysu jsme využili „Function editor“. Samotné zatížení pak bylo definováno na elementy SUFR 154. Na následujících obrázcích (Obr. 25, 26) je znázorněno rozložení Hertzova tlaku nad eliptickou kontaktní plochou.



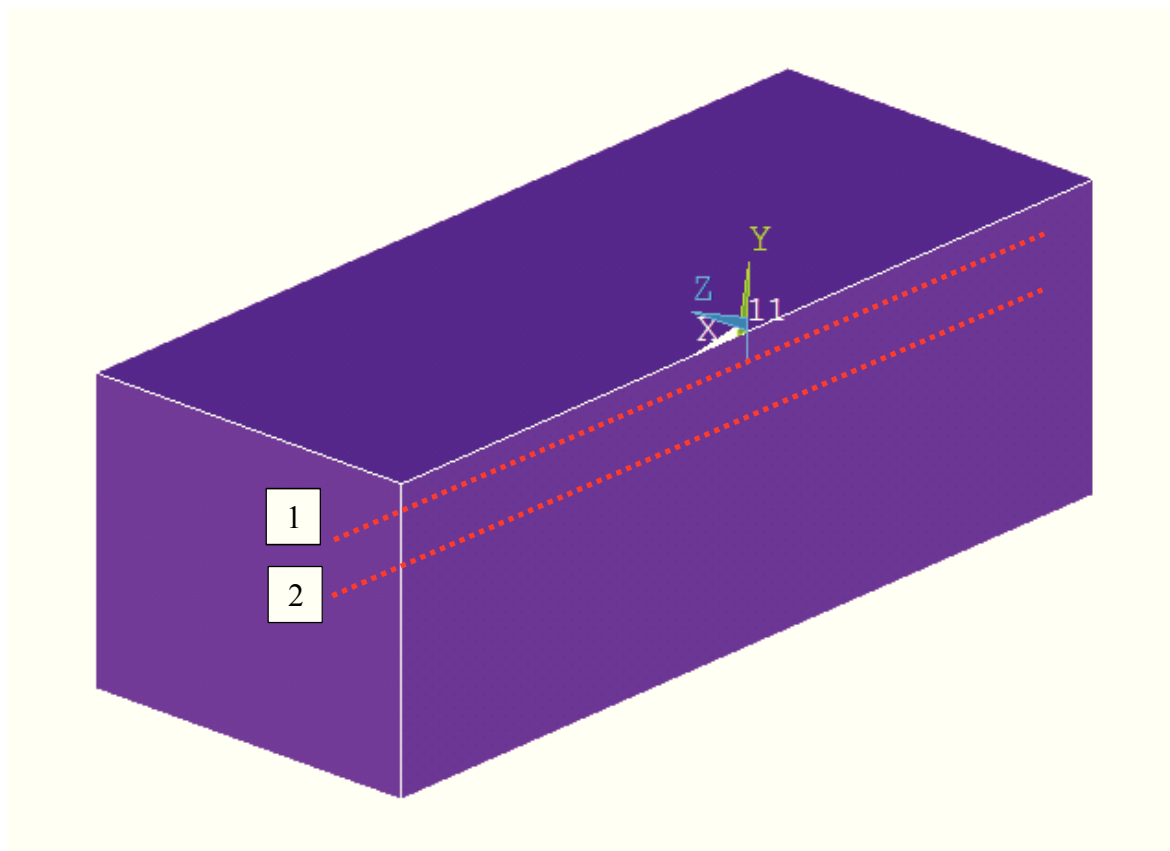
Obrázek 25: Rozložení Hertzova tlaku



Obrázek 26: Rozložení Hertzova tlaku

3.3. Vyhodnocení

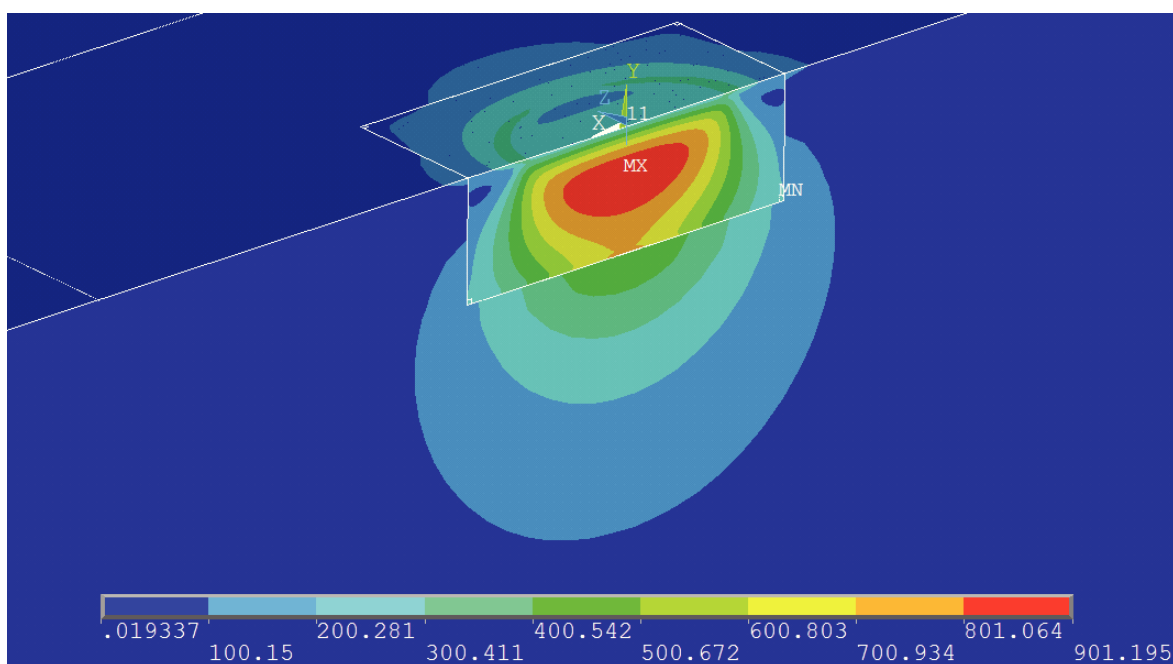
Pro vyhodnocení bylo vytvořeno makro (uvedené v příloze I.), které ve zvolené hloubce a vzdálenosti od roviny symetrie zjišťuje hodnoty jednotlivých složek tenzoru napjatosti. Samotné makro se spouští z příkazové řádky v prostředí programu Ansys. Výsledky průběhů jednotlivých složek tenzoru napjatosti v závislosti na souřadnici x jsou ukládány do textového souboru. Před samotným spuštěním makra je nutné manuálně vybrat uzly v již zmíněné hloubce pod kontaktním povrchem a vzdáleností od roviny symetrie. Výběr uzlů byl prováděn pouze v rámci podobjemu, na jehož horní ploše působí výše popisované zatížení (viz Obr. 25).



Obrázek 27: Rozložení Hertzova tlaku

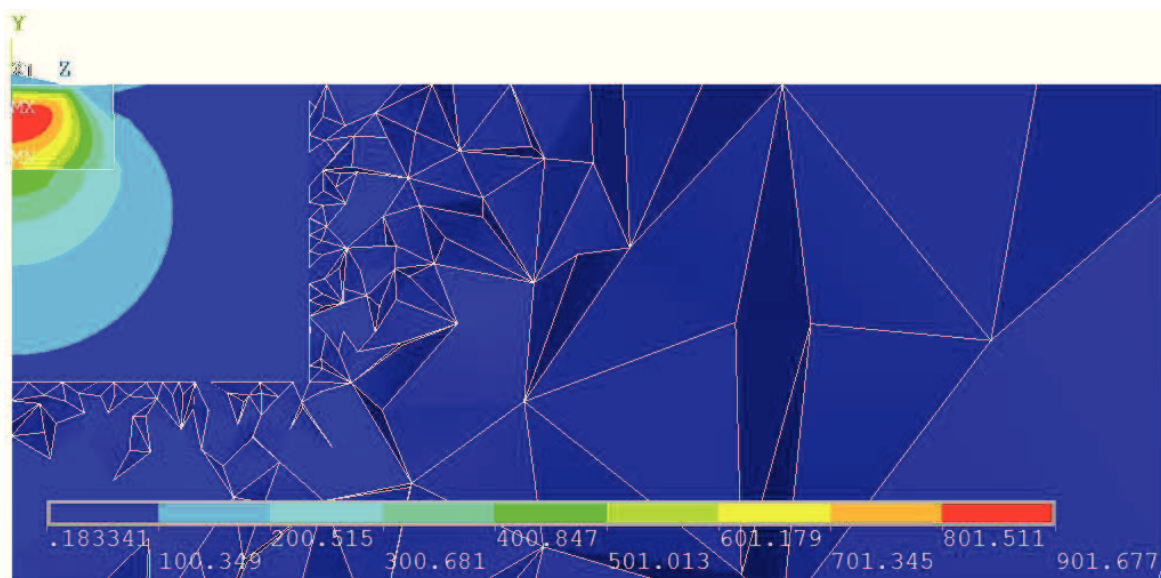
Vyhodnocení bylo provedeno pro dvě hladiny, a to 0,08 mm a 0,36 mm pod kontaktním povrchem. V obou případech byla vzdálenost od roviny symetrie, tj. souřadnice z , rovna 0,36 mm. Počet uzlů, na kterých bylo provedeno vyhodnocování v rámci jedné hladiny, byl roven hodnotě 74.

Následující obrázek znázorňuje průběh redukovaného napětí σ_{HMH} v MPa.



Obrázek 28: Rozložení redukovaného napětí σ_{HMH}

Obrázek 29 nám znázorňuje rozložení redukovaného napětí σ_{HMH} ve středovém řezu v rovině YZ. Průběhy jednotlivých složek tenzoru napjatosti ve zvolených hladinách budou uvedeny v kapitole 4.



Obrázek 29: Rozložení redukovaného napětí σ_{HMH} – pohled na středový řez v rovině YZ

4. Porovnání výsledků:

Následující kapitola se věnuje porovnání výsledků získaných jednak prostřednictvím MKP řešení s využitím programu Ansys a dále s využitím semianalytického přístupu, založeném na Hertzově teorii [2][4]. Porovnávány byly průběhy jednotlivých složek tenzoru napjatosti ve dvou hloubkách pod kontaktním povrchem, a to konkrétně v 0,08 mm a 0,36 mm. V případě MKP řešení jsme měli v každé hloubce k dispozici celkem 74 uzlů, na kterých bylo možné získat výše požadované hodnoty. Pro objektivnost jsme v software, využívající semianalytický přístup [6], uvažovali shodný počet bodů, ve kterých se stanovoval tenzor napjatosti. Vzhledem k rozdílné orientaci souřadných systému u obou přístupů bylo nutné výsledky získané prostřednictvím semianalytického software přizpůsobit výsledkům z Ansysu, platí:

$$\sigma_X \text{ ansys} = \sigma_X \text{ semianalytické řešení}$$

$$\sigma_Y \text{ ansys} = \sigma_Z \text{ semianalytické řešení}$$

$$\sigma_Z \text{ ansys} = \sigma_Y \text{ semianalytické řešení}$$

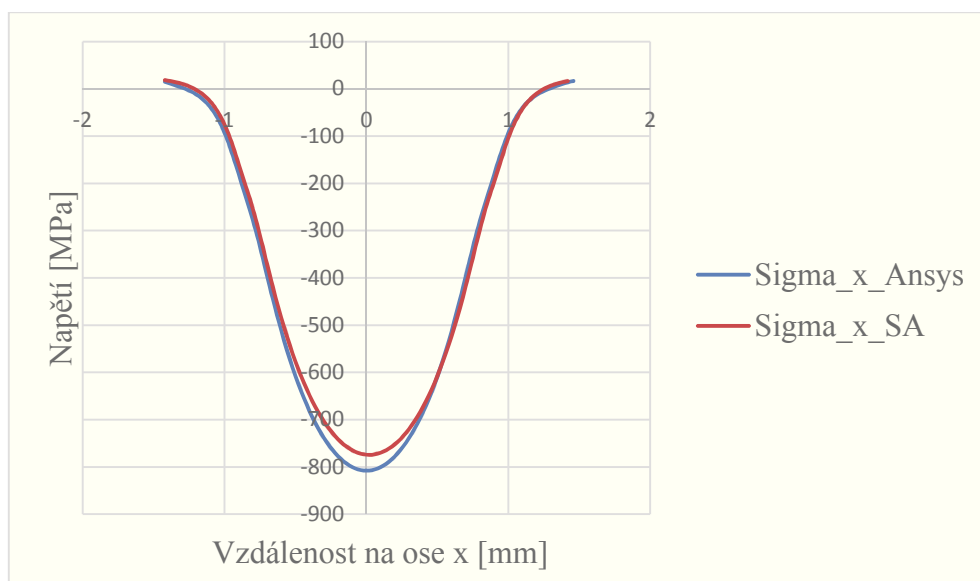
$$\tau_{XY} \text{ ansys} = -\tau_{XZ} \text{ semianalytické řešení}$$

$$\tau_{XZ} \text{ ansys} = \tau_{XY} \text{ semianalytické řešení}$$

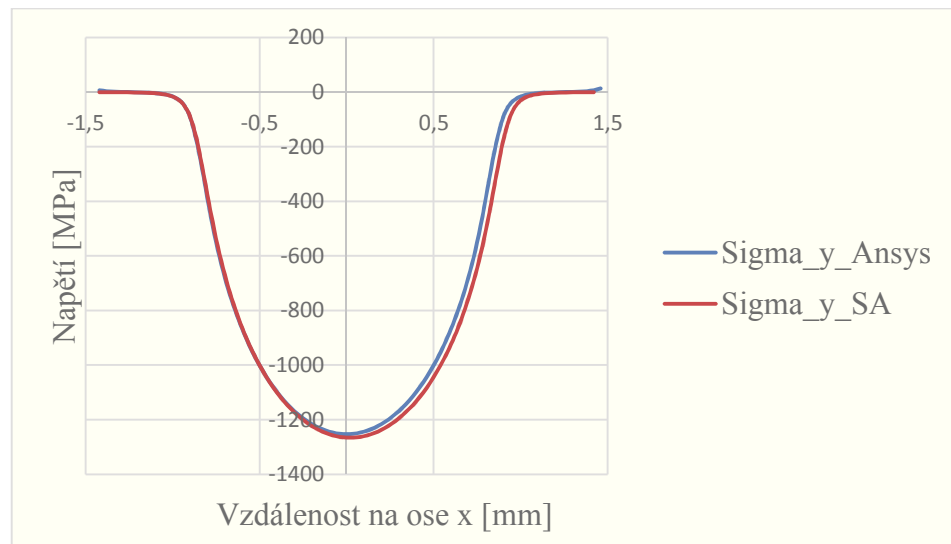
$$\tau_{YZ} \text{ ansys} = -\tau_{YZ} \text{ semianalytické řešení}$$

4.1. Výsledky - 1 část

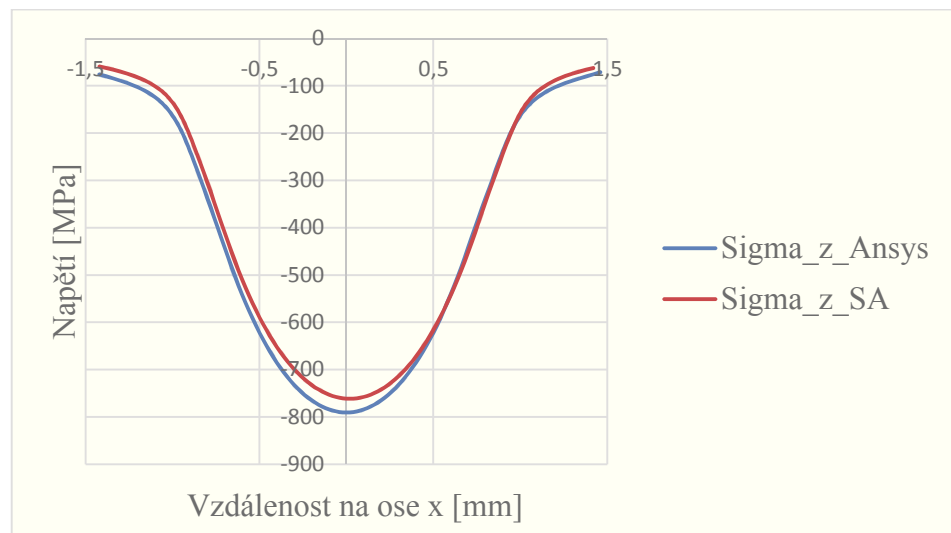
V následující kapitole jsou obsaženy výsledky obou přístupů v hloubce 0,08 mm pod kontaktním povrchem a vzdálenosti 0,36 mm od roviny symetrie. V grafech na obrázcích 30-35 je MKP řešení znázorněno modrou barvou a semianalytické řešení barvou červenou.



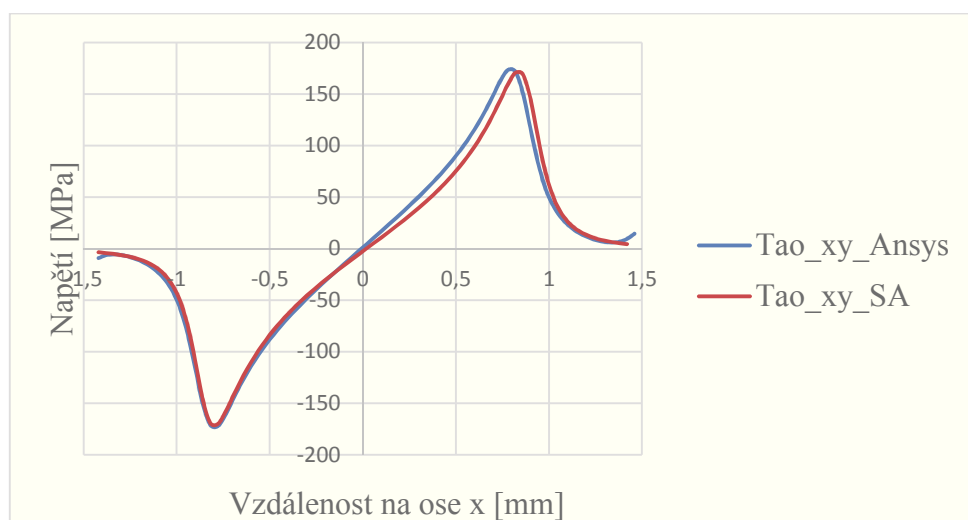
Obrázek 30: Graf normálového napětí ve směru osy X pro hloubku 0,08mm.



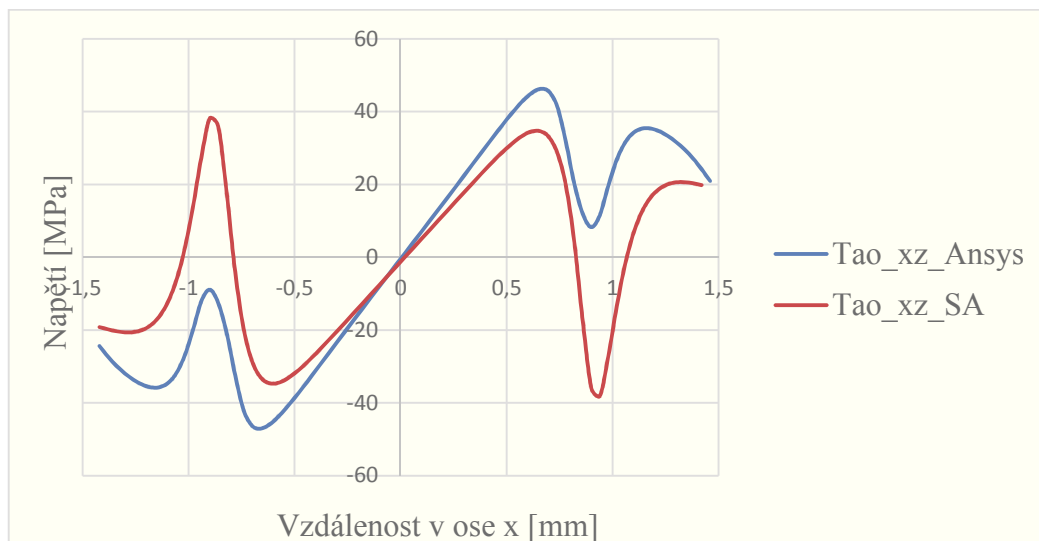
Obrázek 31: Graf normálového napětí ve směru osy Y pro hloubku 0,08mm.



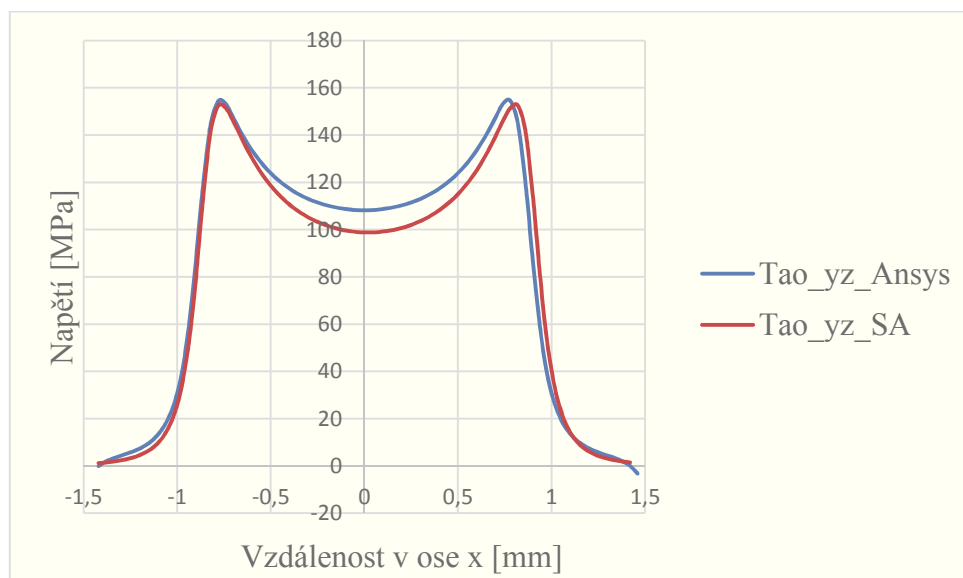
Obrázek 32: Graf normálového napětí ve směru osy Z pro hloubku 0,08mm.



Obrázek 33: Graf smykového napětí v rovině XY pro hloubku 0,08mm.



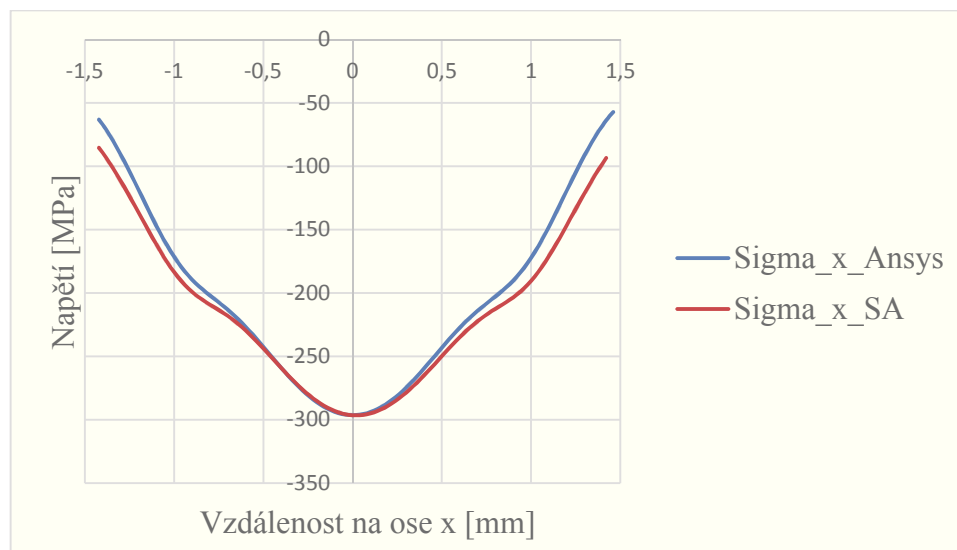
Obrázek 34: Graf smykového napětí v rovině XZ pro hloubku 0,08mm.



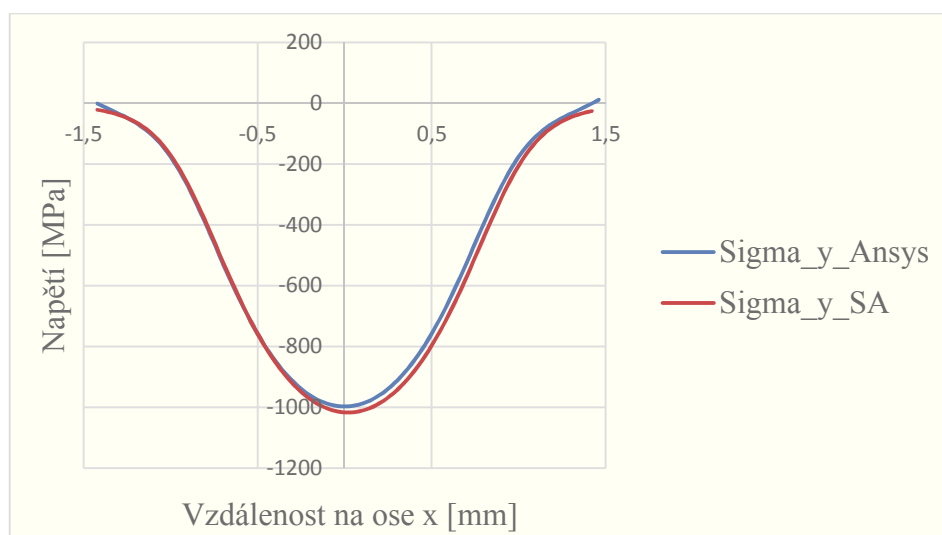
Obrázek 35: Graf smykové napětí v rovině YZ pro hloubku 0,08mm.

4.2. Výsledky - 2 část

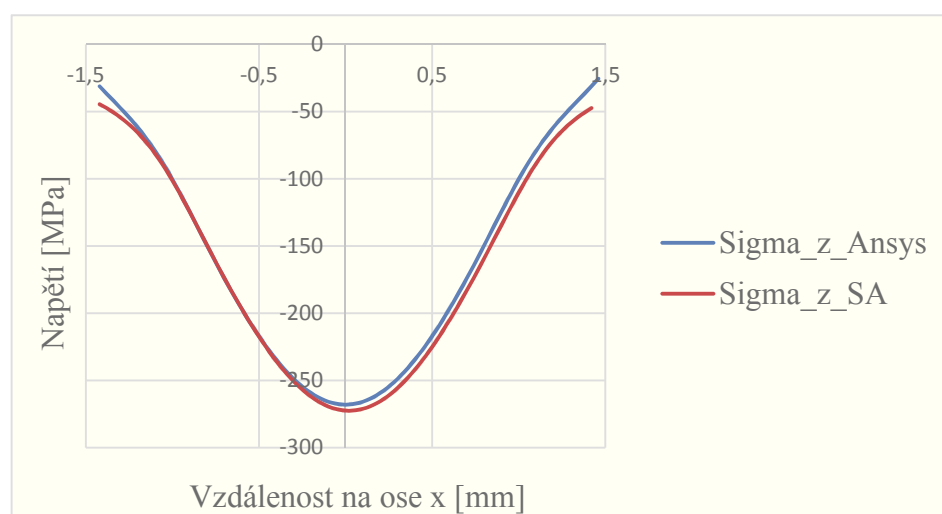
V následující části je vyhodnocen průběh jednotlivých složek tenzoru napjatosti pod kontaktním povrchem a to ve hloubce 0,36 mm (rozměr v ose y) a ve vzdálenosti od roviny symetrie 0,36 mm (rozměr v ose z). Vyhodnocení obsahuje oba přístupy jak numerický, tak semianalytický. V grafech na obrázcích 36-41 je řešení MKP znázorněno modrou barvou a červenou barvou je označeno semianalytické řešení.



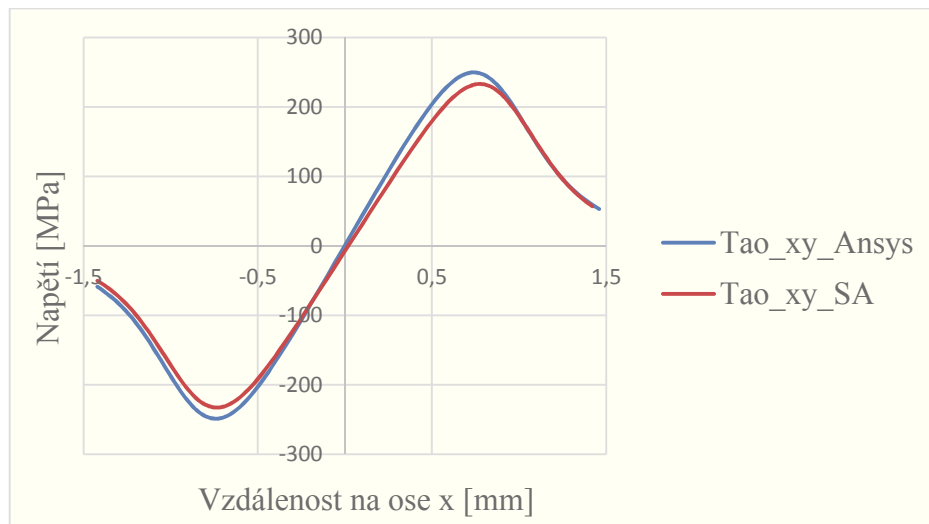
Obrázek 36: Graf normálového napětí ve směru osy X pro hloubku 0,36mm.



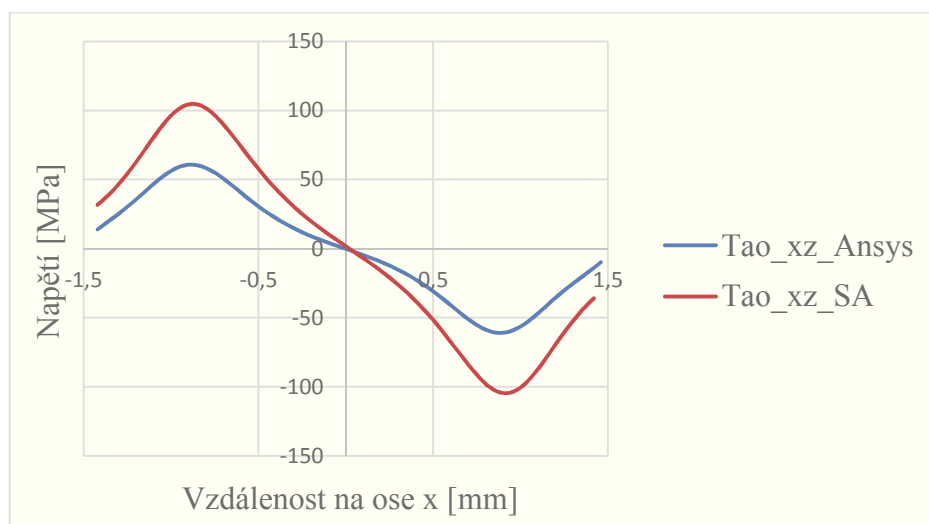
Obrázek 37: Graf normálového napětí ve směru osy Y pro hloubku 0,36mm.



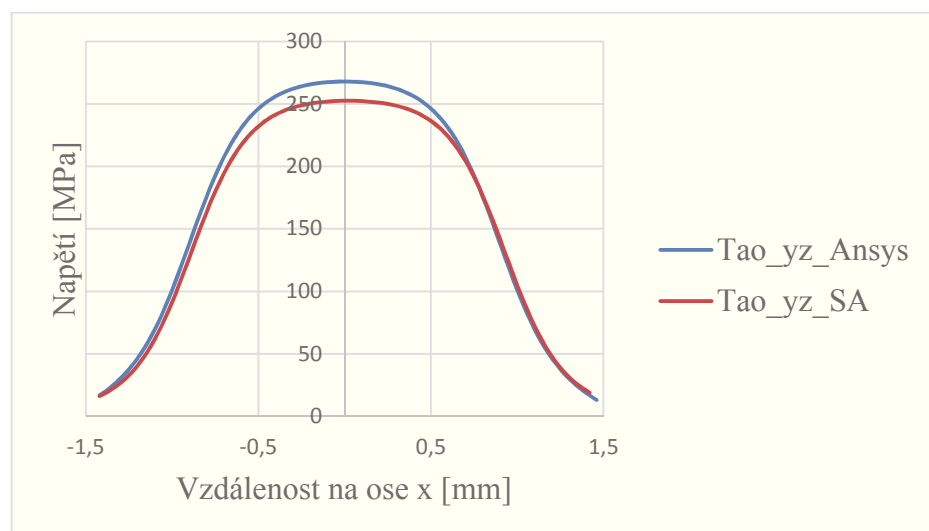
Obrázek 38: Graf normálového napětí ve směru osy Z pro hloubku 0,36mm.



Obrázek 39: Graf smykového napětí v rovině XY pro hloubku 0,36mm.



Obrázek 40: Graf smykového napětí v rovině XZ pro hloubku 0,36mm.



Obrázek 41: Graf smykového napětí v rovině YZ pro hloubku 0,36mm.

5. Závěr

Předložená bakalářská práce se zabývá problematikou nalezení jednotlivých složek tenzoru napjatosti v případě bodového styku kontaktních těles prostřednictvím jednak metody konečných prvků a dále s využitím semianalytického přístupu [4][5]. Předmětem práce je rovněž vzájemné srovnání výsledků z obou přístupů na zvoleném příkladu. Bodový kontakt je realizován působením zatížení s eliptickou kontaktní plochou s Hertzovým rozložením tlaku nad touto oblastí, na nekonečný poloprostor v případě semianalytického přístupu, resp. na kvádr o konečných rozměrech v případě MKP přístupu. U obou přístupů byly získány a následně také porovnávány průběhy jednotlivých složek tenzoru napjatosti v hloubkách 0,08 mm a 0,36 mm pod kontaktním povrchem ve vzdálenosti 0,36 mm od roviny symetrie (viz. Kapitola 3). V rámci efektivnějšího získání výsledků v případě MKP přístupu bylo v prostředí programu Ansys Mechanical APDL v14.5 vytvořeno makro, které umožňuje získat kompletní tenzor napjatosti pro uzly ve zvolené hladině pod kontaktním povrchem. Výsledky semianalytického přístupu [4][6] lze považovat za hodnoty referenční, resp. hodnoty, ke kterým by se měly výsledky z MKP řešení blížit. V obou případech, tj. v hloubkách 0,08 a 0,36 mm je dosaženo poměrně dobré shody, co se normálových napětí ve všech třech osách týče. V případě napětí smykových, konkrétně u složky τ_{xz} si můžeme všimnout výraznějších rozdílů co se průběhu a velikostí amplitudy týče. Příčiny těchto rozdílů bychom mohli hledat v nedostatečné velikosti podobjemu vzhledem k velikosti eliptické kontaktní plochy, v nedostatečné velikosti hlavního objemu, který supluje poloprostor, či v nevhodně zvolených okrajových podmínkách (okrajové podmínky u hlavního objemu, nastavení kontaktní podmínky mezi malým podobjemem a zbytkem tělesa). Uvedené poznatky mohou být námětem k další práci v této problematice.

Seznam použité literatury

- [1] Štencek, M.: *Sestavování map přizpůsobení pro kontaktní plochy : bakalářská práce*. Ostrava, VŠB Technická univerzita, Fakulta strojní, 2006, 41 s., 2 př., Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Halama Radim, Ph.D.
- [2] Timošenko, Š.: *Pružnost a pevnost II*, VTN Praha, Praha, 1951.
- [3] Šofer, M.: *Popis degradace povrchu konstrukčních prvků vlivem opakovaného kontaktního zatížení : Disertační práce*, Ostrava, VŠB Technická univerzita, Fakulta strojní, 2012, 117 s., 4 př., Školitel doc. Ing. Leo Václavek, CSc.
- [4] Sackfield, A.; Hills, D. A.: *Some useful results in the classic Hertz problem*, *J. Strain Analysis*, 1983, 18, 101-105
- [5] SAS IP, Inc.: *ANSYS Mechanical APDL, Release 14.5*, Product help
- [6] Šofer, M.: *Software pro generaci napětového pole pro případ bodového styku kontaktních těles*, Autorizovaný software, Ev. č 017/09-10-2014_SW, VŠB-TU Ostrava, 2014

Poděkování

Chtěl bych poděkovat Ing. Michalovi Šoferovi, Ph.D. za odborné a vstřícné konzultace při vypracovávání této práce, a také za jeho rady a připomínky.

Přílohy

I. Příloha: Makro pro vyhodnocení složek tenzoru napjatosti

!***zadání velikosti hrany elementu v malém podobjemu

*SET,e_size,0.04

!***Zjištění počtu uzlů v ose x (po délce)

*GET,pocet_smer_x,NODE,0,COUNT

!Vytvoření výsledkového pole

!x, Sx,Sy,Sz,Txy,Txz,Tyz

*DIM,result,ARRAY,pocet_smer_x,7

!***zjištění min. čísla uzlu v daném setu

*GET,start_num,NODE,0,NUM,MIN

*SET,node_number,start_num

*DO,i,1,pocet_smer_x-1,1

*GET,next_number,NODE,node_number,NXTH,

*GET,loc_x,NODE,next_number,LOC,X

*SET,result(i,1),loc_x

*GET,Sx,NODE,next_number,S,XY

*SET,result(i,2),Sx

*GET,Sy,NODE,next_number,S,Y

*SET,result(i,3),Sy

*GET,Sz,NODE,next_number,S,Z

*SET,result(i,4),Sz

*GET,Txy,NODE,next_number,S,XY

*SET,result(i,5),Txy

*GET,Txz,NODE,next_number,S,XZ

*SET,result(i,6),Txz

*GET,Tyz,NODE,next_number,S,YZ

*SET,result(i,7),Tyz

*SET,node_number,next_number

*ENDDO

*CFOPEN,napeti,txt

*VWRITE,result(1,1),result(1,2),result(1,3),result(1,4),result(1,5),result(1,6),result(1,7)
(F12.3,F12.3,F12.3,F12.3,F12.3,F12.3,F12.3)

*CFCLOSE,array1,txt